Physique

DEVOIR MAISON n°2☆

pour le vendredi 16 septembre 2022

PC/PC☆

2022-2023

L'accent doit être mis sur la clarté et la précision de la rédaction, ainsi que sur le soin apporté aux calculs et à la présentation.
N'oubliez pas d'indiquer sur la copie le nom de la personne relectrice (code **R**) ou coauteur (code **A**).

Théorie statique des marées

Données relatives à la Terre (de centre T), à la Lune (de centre L) et au Soleil (de centre S) :

Constante de la gravitation universelle : $k = 6{,}7.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-1}$
Intensité de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$
Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0.10^{24}\ kg$
Masse de la Lune : $M_L = 7{,}4.10^{22}\ kg = M_T / 81$
Masse du Soleil : $M_S = 2{,}0.10^{30}\ kg = 3{,}3.10^5\ M_T$
Rayon terrestre moyen : $R_T = 6{,}4.10^6\ m$
Rayon moyen de l'orbite de la Lune autour de la Terre : $TL = 3{,}8.10^8\ m$
Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil : $TS = 1{,}5.10^{11}\ m$
Période de rotation propre de la Terre (jour sidéral) : $\tau_T = 86164\ s = 23h\ 56min\ 4s$.

On considère un système supposé isolé de deux astres en interaction gravitationnelle :
- Une planète (T) de masse M_T, de centre T et de rayon R_T : il s'agira en fait de la Terre.
- Un astre attracteur (A) de masse M_A, de centre A : en pratique, ce sera la Lune ou le Soleil.

(A) et (T) sont supposés tous deux à distribution de masse à symétrie sphérique, ce qui assure qu'ils se comportent, pour l'extérieur, comme des masses ponctuelles concentrées en leur centre vis-à-vis des forces de gravitation.
On note

$$\vec{G}_T(P) = -k.M_T.\frac{\overrightarrow{TP}}{TP^3}$$

le champ de gravitation créé par (T) en un point P quelconque extérieur à (T). De même $\vec{G}_A(P)$ désigne le champ de gravitation créé par (A) en P. On définit plusieurs référentiels utiles à l'étude du système formé par ces deux astres :
- Un référentiel (R_0) supposé galiléen : le référentiel de Copernic par exemple.
- Le référentiel T-centrique (R_T), centré en T, en mouvement de translation par rapport à (R_0).
- Le référentiel (R_{sol}) lié au sol de (T) : son origine sera prise en T, mais, (T) possédant un mouvement de rotation propre à la vitesse angulaire uniforme Ω autour de l'axe des pôles (Tz), (R_{sol}) est donc en rotation dans (R_T) : le vecteur rotation de (R_{sol}) par rapport à (R_0) est $\vec{\Omega} = \Omega.\vec{e_z}$, vecteur constant.

A - Définition de la force de marée

Soit un point matériel P de masse m repéré dans le référentiel (R_{sol}). P est situé à la surface de (T) et on le suppose immobile dans ce référentiel. En plus des forces gravitationnelles et des forces d'inertie, P est soumis à des forces de contact qui seront précisées ultérieurement et qu'on décrit par leur résultante $\vec{f}$.

A.1 - Quelle est l'accélération du point T, centre d'inertie de (T), dans le référentiel (R_0) ?

A.2 -Écrire le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à P dans le référentiel (R_{sol}).

A.3 -En plus de la force de contact $\vec{f}$, il apparaît d'autres termes dans l'équation précédente ; on associe ces termes en deux groupes distincts :

• le premier ne varie pas dans le temps dans (R_{sol}) (on rappelle que P est fixe dans (R_{sol})), on peut le noter $m.\vec{X}(P)$.

• le deuxième varie dans le temps à cause du mouvement apparent de (A) dans (R_{sol}) : on le note $m.\vec{C}_{AT}(P)$ et on le nomme « force de marée de l'astre (A) en P ».

Proposer une notation plus usitée pour le champ $\vec{X}(P)$; de quel champ bien connu s'agit-il ? Vérifier que

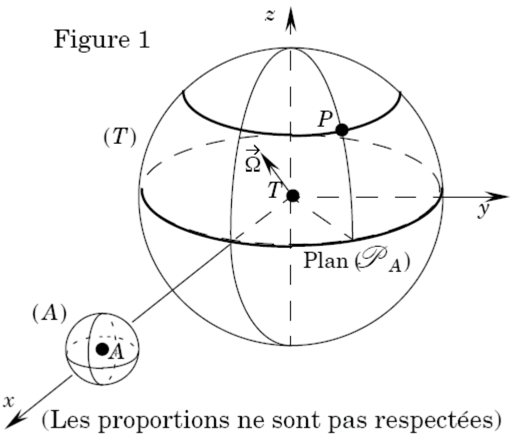
$$\vec{C}_{AT}(P) = \vec{G}_A(P) - \vec{G}_A(T)$$

B - Calcul de la force de marée

Soit ($\mathcal{P}_\mathcal{A}$) le plan constant dans lequel se déplacent A et T. Pour calculer $\vec{C}_{AT}(P)$ à une date donnée, on munit (voir la figure 1) l'espace d'un repère instantané (Txyz) tel que, à la date considérée :

- $\overrightarrow{TA}$ est dirigé selon (Tx) : $\overrightarrow{TA} = TA.\vec{e_x}$.
- (T_y) est contenu dans le plan ($\mathcal{P}_\mathcal{A}$).
- (T_z) est normal à ce plan : comme ($\mathcal{P}_\mathcal{A}$) ne coïncide pas forcément avec le plan équatorial de (T), on remarque que a priori (T_z) ≠ (Tz).

Figure 1



(Les proportions ne sont pas respectées)

Dans ce repère, les coordonnées de P sont (x,y,z).
Soit un point P de la surface de (T), tel que $TP = R_T << TA$, et donc $|x| << TA$, $|y| << TA$ et $|z| << TA$; un calcul élémentaire non demandé montre que le développement limité à l'ordre 1 en $\frac{x}{TA}, \frac{y}{TA}, \frac{z}{TA}$ conduit à l'expression simplifiée de $\vec{C}_{AT}(P)$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ liée au repère (Tx,y,z) :

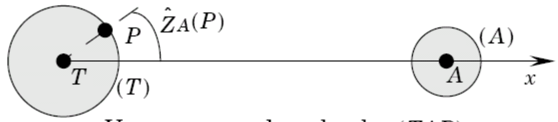
$$\vec{C}_{AT}(P) = -\frac{k.M_A}{TA^2}\begin{bmatrix} -\frac{2.x}{TA} \\ \frac{y}{TA} \\ \frac{z}{TA} \end{bmatrix}.$$

On gardera cette expression simplifiée dans toute la suite du problème.

B.1 - En prenant les valeurs numériques relatives à la Terre et à la Lune, évaluer l'ordre de grandeur du maximum du rapport $\frac{\|\vec{C}_{AT}(P)\|}{\|\vec{G}_T(P)\|}$ à la surface de (T).

B.2 - Représenter sur un schéma clair ce champ $\vec{C}_{AT}(P)$ aux quatre points suivants de *$P_1(R_T,0,0)$* ; *$P_2(0,R_T,0)$* ; *$P_3(-R_T0,0)$* ; *$P_4(0,-R_T0)$*.

Figure 2



Vue en coupe dans le plan(TAP)

B.3 - Montrer qu'il existe un « potentiel » *$V_{AT}(P)$* tel que $\vec{C}_{AT}(P) = -\overrightarrow{grad}(V_{AT})$.

Exprimer ce potentiel *$V_{AT}(P)$* en fonction de *k*, *M_A*, *x*, *y*, *z* et *TA*.

B.4 - On note $\hat{Z}_A(P)$ l'angle *(TP,TA)* : c'est l'angle zénithal de (A) en P. Montrer alors que, pour P à la surface de (T) :

$$V_{AT}(P) = k.M_A.\frac{R_T^2}{2.TA^3}.\left(1 - 3.cos^2\hat{Z}_A(P)\right) \quad (1)$$

C - Modèle statique de la marée océanique

On prend dans cette question pour (T) et (A) les valeurs numériques correspondant respectivement à la Terre et à la Lune ou à la Terre et au Soleil.

On suppose ici que la planète (T) est complètement recouverte d'un océan liquide. L'eau est un liquide incompressible de masse volumique μ. On suppose que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est **radial et que son module g est uniforme** sur toute l'étendue de l'océan. La pression atmosphérique P_0 est supposée uniforme sur toute sa surface. Si (T) était isolée dans l'espace, la surface libre de l'océan serait alors parfaitement sphérique. Mais l'existence de la force de marée créée par (A) va déformer cette surface. On suppose dans cette question que cet océan est constamment en équilibre mécanique sous l'effet du champ de marée $\vec{C}_{AT}\,(P)$ et du champ de pesanteur $\vec{g}$.

C.1 - Justifier que, dans le cadre de cette hypothèse d'équilibre mécanique, la surface libre de l'océan est une équipotentielle du champ résultant de $\vec{C}_{AT}\,(P)$ et de $\vec{g}$.

C.2 - P étant un point de la surface libre du liquide pour lequel l'angle zénithal de (A) vaut $\hat{Z}_A(P)$, on n'a plus exactement $TP = R_T$ mais $TP = R_T + \xi(P)$, $\xi(P)$ représentant la surélévation océanique algébrique en P due aux effets de marée de (A), avec évidemment $|\xi(P)| << R_T$.

Déterminer alors la valeur de $\xi(P)$ à une constante près (qu'il est inutile de chercher à calculer) et donner son expression en fonction de g, k, M_A , R_T , TA et $\hat{Z}_A(P)$.

On note respectivement ξ_{max} et ξ_{min} les valeurs maximale et minimale de $\xi(P)$, $\hat{Z}_A(P)$ pouvant varier de 0 et 180 °. Donner la valeur numérique de l'amplitude maximum $\Delta\xi_L = \xi min_{max}$ due à l'influence de la Lune prévue par ce modèle.

Combien de marées hautes peut-on prévoir par jour ? Calculer de la même façon la valeur numérique de l'amplitude maximum $\Delta\xi_S$ due à l'influence du Soleil.

C.3 - On admet que les effets de marée dus à la Lune et au Soleil se superposent simplement, si bien qu'on peut additionner les deux surélévations ξ introduites précédemment. Il arrive, de façon assez exceptionnelle d'ailleurs, que le Soleil et la Lune se trouvent tous deux dans le plan équatorial de la Terre. On le supposera dans cette question et on considérera que pendant une journée, les positions relatives de T, L et S ne changent pratiquement pas. On considère un point P situé sur l'équateur. On appelle **marnage** la différence de niveau d'eau entre une pleine mer (ou marée haute) et une basse mer consécutives, au même point P.

En raisonnant sur des schémas clairs, expliquer pourquoi il existe en P des marées de vives-eaux (c'est-à-dire de marnage important) et des marées de mortes-eaux, de faible marnage. Déduire des résultats précédents la valeur du marnage de vives-eaux $\Delta\xi_{VE}$ et du marnage de mortes-eaux $\Delta\xi_{ME}$.

À propos de cette question, vers quelles dates de l'année le Soleil se trouve-t-il dans le plan de l'équateur terrestre ?
