

(Centrale Siepelu-PC-2004)

$AN(T)$ est soumis à l'attraction gravitationnelle de A , dans $\mathbb{R}_0$

$$\vec{G}_A(T) = -kM_A \frac{\Delta T}{\Delta T^3}$$

Théorème du centre d'inertie (TCI) appliqué à (T) dans R_0 .

$$M_T \vec{a}_{\text{so}}(T) = M_T \vec{G}_A(T) \rightarrow \vec{a}_{\text{so}}(T) = -k M_A \frac{\vec{A}T}{AT^3} = \vec{G}_A(T)$$

A2. $R_{s,l}$ est NON GALILÉEN.

Forces appliquées à P dans l'isol:

• Force de gravitation de T : $m \vec{G}_T(P) = -k m M_T \frac{\vec{TP}}{TP^3}$

de A: $m \vec{G}_A(P) = -k m \gamma_A \frac{\vec{AP}}{AP^3}$

Forces de contact de résultante $\vec{f}$

Force d'inertie d'entraînement: $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e(P)$

R_{sol} est en rotation uniforme dans $\mathcal{R}_\pi$

R_T est en transition accélérée (cf A1) dans R_0

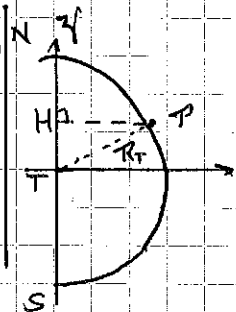
$$\Rightarrow \vec{a}_c = -\Omega^2 \vec{HP} + \vec{a}_{\phi_0}(T) = -\Omega^2 \vec{HP} + \vec{G}_A(T) \Big|_{\uparrow \uparrow}$$

P est fixe dans $\mathcal{R}_{sol}$ donc $\vec{a}_{\mathcal{R}_{sol}}(P) = \vec{0}$

Le PFD approuvé, dans tout, à P s'écrit.

$$m \vec{a}_{\text{rad}}(P) = m \Omega^2 \vec{r}_P - m \vec{G}_A(T) + m \vec{G}_T(P) + m \vec{G}_P(P)$$

$$\rightarrow \vec{0} = m (\Omega^2 \vec{r}_P + \vec{G}_T(P) + \vec{G}_A(P) - \vec{G}_A(T)) + \vec{f}$$



A3. $\vec{X}(P) = \vec{G}_r(P) + \Omega^2 \vec{HP} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a}_P$: accélération de la pesanteur

$$\vec{C}_{AT}(P) = \vec{G}_A(P) - \vec{G}_A(T)$$

B. Démonstration non demandée de l'expression de $\vec{C}_{AT}(P)$

$$\vec{c}_{AT}(P) = k M_A \left(\frac{\vec{PA}}{PA^3} - \frac{\vec{TA}}{TA^3} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{PA} = \frac{1}{PT} + \frac{1}{TA}$$

$$\rightarrow PA = \sqrt{PA^2} = [PT^2 + TA^2 - 2PT \cdot TA \cos(\hat{\Sigma}_A(P))]^{1/2} \quad \text{où } PT = R_T$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{r_A^3} = \frac{1}{T_A^3} \left[1 + \frac{R_T^2}{T_A^2} - 2 \frac{R_T}{T_A} \cos(\hat{Z}_A(p)) \right]^{-3/2} \underset{DL_1}{\approx} \frac{1}{T_A^3} \left[1 + 3 \frac{R_T}{T_A} \cos(\hat{Z}_A(p)) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{C}_{AT}(P) \approx \frac{kM_A}{TA^3} \left[(\vec{PT} + \vec{TA}) \left(1 - 3 \frac{R_T}{AT} \cos(\hat{Z}_A(P)) \right) - \vec{TA} \right]$$

$$\approx \frac{kM_A}{TA^3} \left[\vec{PT} + 3 \frac{\vec{TA}}{TA} R_T \cos(\hat{Z}_A(P)) \right] \quad \text{au 1^{er} ordre en } \frac{R_T}{TA}$$

Où $\vec{PT} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$; $\frac{\vec{TA}}{TA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $R_T \cos(\hat{Z}_A(P)) = x$

Donc $\vec{C}_{AT}(P) \approx \frac{kM_A}{TA^3} \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

B1. $\|\vec{C}_{AT}(P)\| \approx \frac{kM_A}{TA^3} (4x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; Or $x^2 + y^2 + z^2 = R_T^2$

$\hookrightarrow \vec{C}_{AT}(P) \approx \frac{kM_A}{TA^3} (3x^2 + R_T^2)^{1/2} \leq \frac{kM_A}{TA^3} (4R_T^2)^{1/2}$

$\|\vec{G}_T(P)\| = \frac{kM_T}{R_T^2}$

$\Rightarrow \kappa = \left\| \frac{\vec{C}_{AT}(P)}{\vec{G}_T(P)} \right\| \approx \frac{2M_A}{M_T} \frac{R_T^3}{TA^3}$

A.N: (A) est la Lune

$\kappa = 2 \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^3}{TL^3} ; \kappa = 1,2 \cdot 10^{-7}$

B2. $\vec{C}_{AT}(P) = -\text{grad } V_{AT} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V_{AT}}{\partial x} \\ -\frac{\partial V_{AT}}{\partial y} \\ -\frac{\partial V_{AT}}{\partial z} \end{pmatrix}$

$\frac{\partial V_{AT}}{\partial x} = \frac{kM_A}{TA^3} 2x$; On intègre à y et z constants

$\hookrightarrow V_{AT} = -\frac{kM_A}{TA^3} x^2 + f(y, z)$

$\frac{\partial V_{AT}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = + \frac{kM_A}{TA^3} y \rightarrow f(y, z) = \frac{kM_A}{TA^3} \frac{y^2}{2} + g(z)$

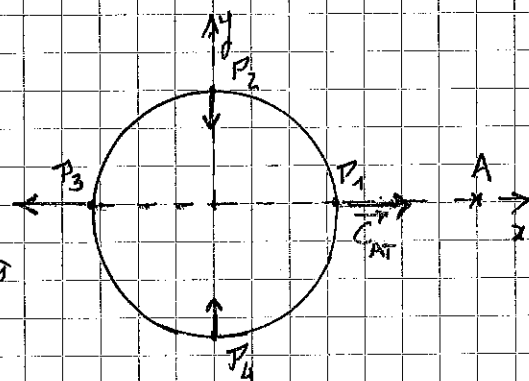
$\frac{\partial V_{AT}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = + \frac{kM_A}{TA^3} z \rightarrow f(y, z) = \frac{kM_A}{TA^3} \frac{z^2}{2} + h(y)$

Pour conclure $V_{AT} = -\frac{kM_A}{TA^3} (2x^2 + y^2 + z^2)$

B3. $\cos(\hat{Z}_A(P)) = \frac{x}{R_T}$; $R_T = x^2 + y^2 + z^2$

$V_{AT} = -\frac{kM_A}{TA^3} (3x^2 - x^2 - y^2 - z^2) = -\frac{kM_A}{TA^3} R_T^2 (3 \cos^2(\hat{Z}_A(P)) - 1)$

Donc $V_{AT} = \frac{kM_A}{TA^3} R_T^2 (1 - 3 \cos^2(\hat{Z}_A(P)))$



C1. Écrivons la relation de l'hydrostatique pour une particule de fluide en P:

$$\vec{\text{grad}} p = \mu (\vec{g} + \vec{C}_{AT}(P))$$

où $\vec{g} = -g \vec{e}_r = -\vec{\text{grad}}(gr)$ en coordonnées sphériques.

$p = P_0$ uniforme dans la surface de l'océan donc $\vec{\text{grad}} p = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{0} = -\mu \cdot \vec{\text{grad}} (gr + V_{AT})$ donc la surface des océans est une surface équipotentielle pour $V_{\text{tot}} = gr + V_{AT}$.
Potentiel résultant.

C2. $gr + V_{AT} = \text{cte} \rightarrow \frac{kM_T}{R_T^2} (R_T + \xi(P)) + \frac{kM_A}{2TA^3} (R_T + \xi)^2 (1 - 3\cos^2(\hat{z}_A(P))) = \text{cte}$

$$\frac{M_T}{R_T} \left(1 + \frac{\xi}{R_T}\right) + \frac{M_A}{2TA^3} R_T^2 \left(1 + \frac{\xi}{R_T}\right)^2 (1 - 3\cos^2(\hat{z}_A)) = \text{cte}$$

$$\approx 1 + \frac{2\xi}{R_T}$$

$$\Rightarrow \xi \left[\frac{M_T}{R_T^2} + \frac{M_A R_T}{TA^3} (1 - 3\cos^2(\hat{z}_A)) \right] + \frac{M_A R_T^2}{2TA^3} (1 - 3\cos^2(\hat{z}_A)) = \text{cte}'$$

du 3^e ordre en $\frac{R_T}{TA}$ donc négligeable devant le terme précédent d'ordre 0

$$\Rightarrow \xi \approx \frac{M_A}{2M_T} \frac{R_T^4}{TA^3} (3\cos^2(\hat{z}_A) - 1) + \text{cte}''$$

* $\xi_{\text{max}} = \xi(\hat{z}_A = 0) = \frac{M_A}{M_T} \frac{R_T^4}{TA^3} + \text{cte}''$: P en P₁

$\xi_{\text{min}} = \xi(\hat{z}_A = 90^\circ) = -\frac{M_A}{2M_T} \frac{R_T^4}{TA^3} + \text{cte}''$: P en P₂

$$\Delta \xi = \xi_{\text{max}} - \xi_{\text{min}} = \frac{3}{2} \frac{M_A R_T^4}{M_T TA^3}$$

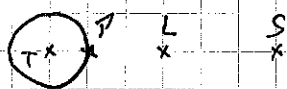
Pour la lune : $\Delta \xi_L = 0,57 \text{ m}$

— le Soleil $\Delta \xi_S = 0,25 \text{ m}$

$\xi = \xi_{\text{max}}$ en P₁ et P₃ donc les marées hautes par jour

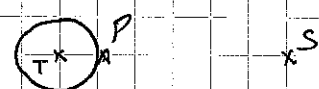
$\xi = \xi_{\text{min}}$ en P₂ et P₄ " " basses " "

C3 - VIVE EAU
L et S en conjonction ou en opposition.



$$\Delta \xi_{VE} = \Delta \xi_L + \Delta \xi_S = 0,82 \text{ m}$$

MORTE EAU
L et S en quadrature



$$\Delta \xi_{ME} = \Delta \xi_L - \Delta \xi_S = 0,32 \text{ m}$$

Aux équinoxes, le soleil est au zénith de l'équateur à l'heure du midi solaire.

