

1. a. $\omega = 2\pi f \in [6,3 \cdot 10^3; 1,9 \cdot 10^5] \text{ rad s}^{-1}$

$$\Omega_c \approx \frac{10^{-19} \times 5 \cdot 10^5}{10^{-30}} = 10^6 \text{ rad s}^{-1} \gg \omega.$$

b. Onde transverse: Utilisons les équations de Maxwell en notation complexe pour l'onde progressive plane harmonique (OPPH) étudiée.

* Équation de Maxwell-Gauss: $-ik \cdot \vec{E} = 0$ car la milieu est neutre.
Donc $\vec{k} \perp \vec{E}$ où $\vec{k} = k\vec{e}_z$.

* Équation de Maxwell-Thomson: $-ik \cdot \vec{B} = 0$, donc $\vec{k} \perp \vec{B}$

Donc l'onde électromagnétique est transverse.

Densité de courant: Par définition, dans ce plasma $\vec{j} = ne(\vec{v}_{ion} - \vec{v}_e)$

On considère les ions suffisamment massifs par rapport aux électrons pour négliger leur vitesse et donc leur contribution à la densité de courant.

On note: $\vec{v} = \vec{v}_e$.

Appliquons la 2^e loi de Newton à un électron: $m\vec{\dot{v}} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_s)$

où on a négligé le terme $\vec{v} \wedge \vec{B}$ car $B_s \gg B$

En régime sinusoïdal forcé par le champ électromagnétique $\vec{v} = i\omega \vec{r}$

d'où en projection dans une base cartésienne: (1) $i m \omega v_x = -e E_x - e v_y B_s$
(2) $i m \omega v_y = -e E_y + e v_x B_s$

* $-\frac{i m \omega}{e B_s} (1) + (2)$: $\frac{m^2 \omega^2}{e B_s} v_x = \frac{i m \omega}{B_s} E_x - e E_y + e v_x B_s$

$$\hookrightarrow v_x \left(\frac{m^2 \omega^2}{e B_s} - e B_s \right) = \frac{i m \omega}{B_s} E_x - e E_y$$

$$v_x = \frac{i m \omega e E_x - e^2 B_s E_y}{m^2 \omega^2 - e^2 B_s^2}$$

* $\frac{i m \omega}{e B_s} (2) + (1)$: $-\frac{m^2 \omega^2}{e B_s} v_y = -e E_x - \frac{i m \omega}{B_s} E_y - e v_y B_s$

$$\hookrightarrow v_y \left(e B_s - \frac{m^2 \omega^2}{e B_s} \right) = -\frac{i m \omega}{B_s} E_y - e E_x$$

$$v_y = \frac{e^2 B_s E_x + i m \omega e E_y}{m^2 \omega^2 - e^2 B_s^2}$$

De plus $e^2 B_s \approx 10^{-43} \text{ USI}$ et $m \omega c \approx 10^{-46} \text{ USI} \ll e^2 B_s$
 $e^2 B_s^2 \approx 10^{-48} \text{ USI}$ et $m^2 \omega^2 \approx 10^{-54} \text{ USI}$

d'où $v_x \approx \frac{E_y}{B_s}$ et $v_y \approx -\frac{E_x}{B_s} \Rightarrow \begin{cases} j_x \approx -me \frac{E_y}{B_s} \\ j_y \approx +me \frac{E_x}{B_s} \end{cases}$

soit $\begin{cases} j_x \approx -\epsilon \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c} E_y \\ j_y \approx +\epsilon \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c} E_x \end{cases}$

2. a. $\underline{E}_y = -i \underline{E}_x = \underline{E}_x e^{-i\pi/2} = E_{0x} e^{i(\omega t - kz + \pi/2)}$

Poseons $\underline{E}_{0x} = E_{0x} \Rightarrow \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_y = +E_{0x} \sin(\omega t - kz) \end{cases}$

$\frac{d\vec{E}}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega E_{0x} \sin(\omega t - kz) \\ \omega E_{0x} \cos(\omega t - kz) \end{pmatrix} ; \quad \vec{E} \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} = \omega E_{0x}^2 [\cos^2(\omega t - kz) + \sin^2(\omega t - kz)] = \omega E_{0x}^2$

$\text{sgn}[(\vec{E} \cdot \frac{d\vec{E}}{dt}) \cdot \vec{k}] > 0$ et $E_{0x} = E_{0y}$. Il s'agit donc d'une onde polarisée circulairement à gauche

b. A l'aide des équations de Maxwell en notation complexe :

$-i\vec{k} \wedge (-i\vec{k} \wedge \vec{E}) = -i\vec{k}(-i\vec{k} \cdot \vec{E}) + k^2 \vec{E} = k^2 \vec{E}$ car $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

et $-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} ; \quad -i\vec{k} \wedge (-i\vec{k} \wedge \vec{E}) = -i\omega(-i\vec{k} \wedge \vec{B})$
 $= -i\omega \mu_0 \vec{j} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$

$\Rightarrow \begin{cases} k^2 E_x = +i\omega \mu_0 \epsilon \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c} E_y + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = \frac{\omega^2}{c^2} \left(i \frac{\Omega_p^2}{\omega \Omega_c} E_y + E_x \right) \\ k^2 E_y = -i\omega \mu_0 \epsilon \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c} E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_y = \frac{\omega^2}{c^2} \left(-i \frac{\Omega_p^2}{\omega \Omega_c} E_x + E_y \right) \end{cases}$

or $\Omega_p \approx \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} \approx \left(\frac{10^{13} \cdot 10^{-38}}{10^{-30} \cdot 10^{-11}} \right)^{1/2} = 10^3 \text{ rad s}^{-1}$

donc $\Omega_p \gg \omega$ et $\Omega_p^2 \gg \omega \Omega_c$

D'où $\begin{cases} k^2 E_x \approx i \frac{\omega}{c^2} \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c} E_y = +\frac{\omega}{c^2} \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c} E_x \\ k^2 E_y \approx -i \frac{\omega}{c^2} \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c} E_x \Rightarrow k^2 E_y = \frac{\omega}{c^2} \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c} E_y \end{cases}$

$k^2 = \frac{\omega}{c^2} \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c}$ Relation de dispersion.

$$c) \quad v_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{\text{Re}(k)} = c \sqrt{\omega \frac{\epsilon_c}{\epsilon_p^2}}$$

la vitesse de phase est une fonction croissante de ω , donc les hautes fréquences se propagent plus vite que les basses.

Une fois transformées en ondes sonores, le signal débutera par les sons aigus (HF) et se poursuivra par les sons plus graves (BF), ainsi le son aura une tonalité descendante.

- 3) a. Onde circulaire gauche; telle que $\underline{E}_y = -i \underline{E}_x$
 " " droite, telle que $\underline{E}_y = +i \underline{E}_x$

Onde résultante :
$$\begin{cases} \underline{E}_x + \underline{E}_x = 2\underline{E}_x \\ \underline{E}_y + \underline{E}_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{E} = 2\underline{E}_x \underline{e}_x$$

 Onde polarisée rectilignement selon $\underline{e}_x$.

- b. Cas de l'onde polarisée circulairement à gauche :

Relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega}{c^2} \frac{\epsilon_p}{\epsilon_c} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v_p}$ (pour une propagation sans z croissants)

Onde progressive

Cas de l'onde polarisée circulairement à droite : $\underline{E}_y = +i \underline{E}_x$

Relation de dispersion $k^2 = -\frac{\omega}{c^2} \frac{\epsilon_p^2}{\epsilon_c} \Rightarrow k = -i \sqrt{\frac{\omega}{c^2} \frac{\epsilon_p^2}{\epsilon_c}}$ (pour atténuation)

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i\omega t - |k|z}$$

Onde évanesciente

Pour $z \gg D = \frac{1}{|k|}$, l'onde polarisée à droite est quasi absente du plasma pour le rôle de filtre. L'onde incidente polarisée rectilignement devient une onde polarisée circulairement à gauche.

$$1,1 < D < 63 \text{ km (hectomètres)}$$



