



L'accent doit être mis sur la clarté et la précision de la rédaction, ainsi que sur le soin apporté aux calculs et à la présentation.

N'oubliez pas d'indiquer sur la copie le nom de la personne relectrice (code R) ou coautrice (code A).

SISMOMETRE

Un sismomètre est un instrument de mesure qui permet d'enregistrer les secousses sismiques, c'est-à-dire les mouvements du sol. Pour les caractériser de manière complète, une station sismique doit comporter trois sismomètres dans trois directions orthogonales formant une base de l'espace : deux horizontaux (Nord-Sud et Est-Ouest) et un vertical. La figure 1 montre un sismomètre vertical, un sismomètre horizontal, ainsi qu'un exemple d'enregistrement obtenu au cours d'un séisme.

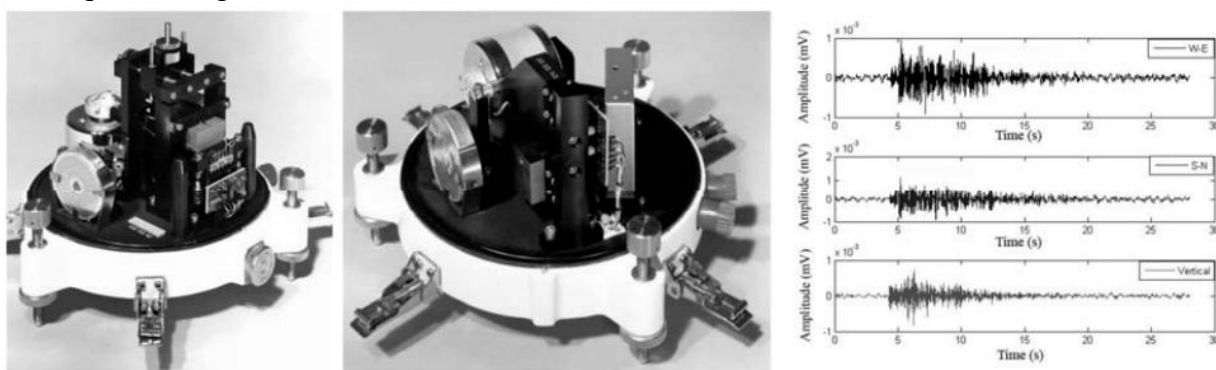


Figure 1 : Sismomètre vertical ZM 500 du CEA (à gauche), sismomètre horizontal HM 500 du CEA (au centre), sismogrammes obtenus (à droite)

Les sismomètres sont classés en fonction du contenu fréquentiel auquel ils sont sensibles. L'une des exigences de ce type de capteur est d'être capable de mesurer les mouvements du sol dans une gamme de fréquence allant de $0,1 \text{ Hz}$ à 100 Hz afin de couvrir une large gamme de séisme (critère d'exigence).

L'objectif de ce problème est de proposer une modélisation du fonctionnement du sismomètre et d'évaluer la pertinence de sa réponse à une sollicitation sismique en fonction de ses caractéristiques et de la fréquence des ondes sismiques.

I.1 - Principe de fonctionnement des sismomètres

L'objectif de cette partie est d'appréhender le fonctionnement des sismomètres verticaux et horizontaux. Le sismomètre vertical est constitué d'un socle très rigide encastré au sol et d'une masse M suspendue dans le vide par un ressort attaché au socle (figure 2). Un système d'amortissement, relié au ressort, permet d'atténuer les oscillations pour que les mesures réalisées par le système d'acquisition, lié à la masse, soient exploitables et caractérisent le séisme. Le vecteur de l'accélération de la pesanteur est noté $\vec{g}$. Pendant le séisme, lors du passage du train d'ondes, le mouvement relatif de la masse par rapport au socle est amorti et enregistré via un capteur électromagnétique de vitesse.

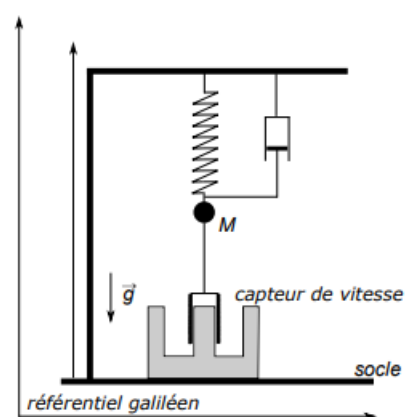


Figure 2 : Schéma d'un sismomètre vertical

Q1. La modélisation proposée sur la figure 2 permet de mesurer des vibrations verticales du sol. Sur le même principe, schématiser, un modèle permettant de mesurer des vibrations horizontales.

La suite de ce sujet s'intéresse uniquement à la modélisation d'un sismomètre vertical.

II - Capteur de vitesse

L'objectif de cette partie est d'évaluer la bande-passante du capteur de vitesse pour que ce dernier respecte le critère d'exigence. Le mouvement de la masse est mesuré grâce à un capteur électromagnétique de vitesse, constitué d'une bobine solidaire de la masse du sismomètre. La bobine se déplace dans le champ magnétique d'un aimant toroïdale solidaire du socle (figure 4). La bobine d'inductance propre L est branchée en série avec un résistor de résistance R_S aux bornes duquel on mesure une tension u . On note $\vec{v}_b = v_b \vec{u}_z$ la vitesse de la bobine dans le référentiel du socle

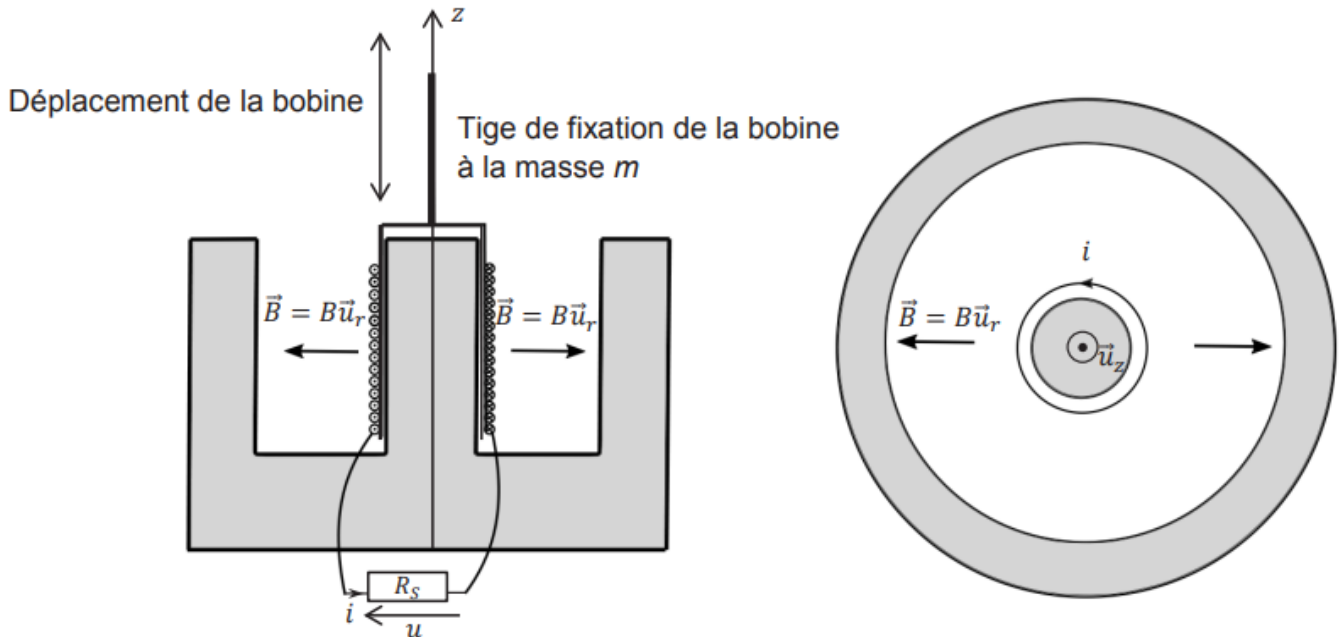


Figure 3 : Schématisation d'un capteur de vitesse

Q2. Rappeler l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{Lap}$ dite de Laplace s'exerçant sur un tronçon conducteur de longueur $d\ell$ parcourue par un courant électrique d'intensité i plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$

Q3. En déduire la résultante $\vec{F}_{Lap}$ de l'action mécanique due aux forces de Laplace s'exerçant sur la bobine en fonction de B , de i et de la longueur du bobinage ℓ .

Q4. Le mouvement de la bobine dans le champ magnétique induit une force-électromotrice $e(t)$ fournissant une puissance opposée à la puissance mécanique développée par $\vec{F}_{Lap}$. Interpréter physiquement ce résultat, puis donner l'expression de $e(t)$ en fonction de B , ℓ et de $v_b(t)$.

Q5. Retrouver cette expression de $e(t)$ à l'aide de la loi de Faraday. On supposera l'amplitude des vibrations suffisamment faible pour que la bobine reste entièrement soumise au champ $\vec{B}$.

Q6. Représenter le schéma électrique équivalent du capteur de déplacement.

Q7. Déterminer l'équation différentielle liant $u(t)$ à $v_b(t)$.

Q8. Pour $L = 100 \text{ mH}$ et en tenant compte du critère d'exigence en fréquence, indiquer la valeur minimale de R_S pour laquelle la tension u peut être considérée comme proportionnelle à la vitesse v_b permettant à ce dispositif de constituer un capteur de vitesse instantanée lors d'un séisme. On admettra ce point par la suite.

Q9. Déduire de la question précédente que $\vec{F}_{Lap} = -\lambda_b \vec{v}_b$. Exprimer λ_b en fonction de B , ℓ et de R_S . L'expression de $\vec{F}_{Lap}$ est-elle en accord avec la loi de modération de Lenz ?

III - Modèle de connaissance d'un sismomètre vertical

L'objectif de cette partie est d'établir le modèle de connaissance d'un sismomètre vertical et d'établir le lien entre ses grandeurs caractéristiques et celles des séismes. Le paramétrage, donné sur la figure 4, est adopté pour les 3 configurations suivantes :

- au repos et sans masse suspendue (a) ;
- au repos et avec la masse suspendue et le capteur (b);
- au cours d'un séisme (c).

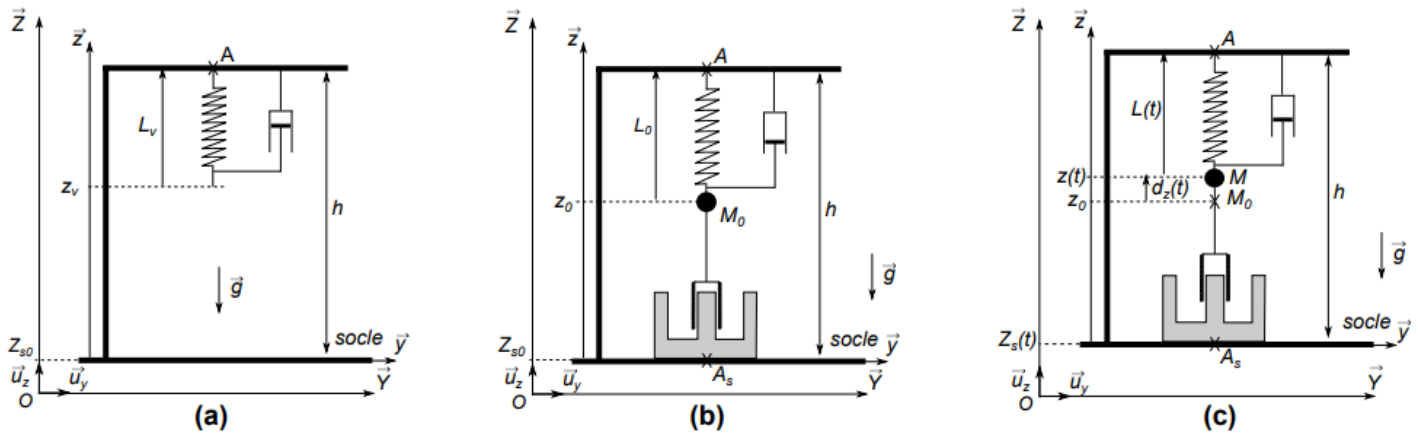


Figure 4 : Trois configurations différentes pour le paramétrage

Hypothèses et modélisation

– Les positions z_0 et $z(t)$ sont repérées par rapport au socle. Lorsque le sol est en mouvement, du fait d'un séisme, le référentiel associé au socle ne peut donc plus être considéré comme galiléen. La figure 4 introduit cette distinction entre le référentiel $\mathcal{R}$ de repère fixe (O, X, Y, Z) , supposé galiléen, et le référentiel $\mathcal{R}'$ de repère fixe (A_s, x, y, z) , animé d'une translation verticale $Z_s(t)$ due au séisme. La base orthonormée associée est $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

- Action mécanique $\vec{F}_r$ du ressort sans masse et de raideur k , de longueur à L_v , de longueur L_0 lorsqu'une masse ponctuelle M lui est solidaire et au repos. Au cours du séisme, cette longueur varie et est notée $L(t)$ à un instant t

- Action mécanique de l'amortisseur sur la masse $\vec{F}_a$, de coefficient de frottement visqueux λ_a , force supposée linéaire en vitesse dans le référentiel lié au socle. Cette force s'oppose au mouvement de la masse.

- Action mécanique du capteur sur la masse M : $\vec{F}_{Lap}$

Q10. On considère dans un premier temps la masse ponctuelle M au repos. Etablir la relation à l'équilibre entre z_0 , z_v , k , M et de g .

Q11. Au cours du séisme, établir l'équation différentielle vérifiée par $d_z(t)$ lors de la secousse sismique.

On considère une vibration sismique sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude Z_{sm} :

$$Z_s(t) = Z_{sm} \cdot \cos(\omega t)$$

On se placera dans la suite en régime permanent non stationnaire (donc ici en régime sinusoïdal forcé)

Q12. Etablir l'expression de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{D}_z(j\omega)}{Z_{sm}}$ où $\underline{D}_z(j\omega)$ est l'amplitude complexe de la réponse en vibrations de la masse M . La mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_0}j\omega - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On précisera les expressions de la pulsation propre ω_0 et de ξ .

Q13. Déterminer le module et l'argument $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega)$.

Q14. Tracer le diagramme de Bode, c'est-à-dire les graphes de $G_{dB}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ en fonction de $\log(\omega)$. On distinguera les cas $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Q15. L'amplitude mesurée doit être identique à l'amplitude du séisme sur la plage de fréquence des séismes. Comment faut-il choisir la pulsation propre ω_0 par rapport à la pulsation ω de la secousse sismique ?

Quel est alors le déphasage entre la vibration du sismomètre et celle du sol ?

Ecrire alors l'expression de $d_z(t)$.

Q16. Quel est le meilleur choix pour le coefficient d'amortissement ζ pour que la réponse de relaxation du sismomètre à un échelon de déplacement soit la plus rapide ?

Le sismomètre étudié a une pulsation propre de $0,1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et un coefficient d'amortissement $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Q17. Conclure sur les fréquences de séisme que ce sismomètre est capable de mesurer.

