

N.B.: Vitesse quadratique moyenne des atomes d'argent :

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow u = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$$

A.N: $T = 1000^\circ \text{C}$
 $m = \frac{M}{N_A}$

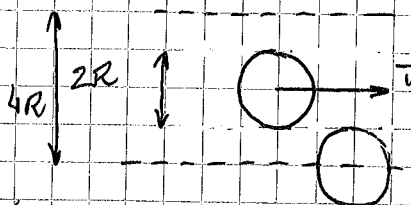
$u = 545 \text{ m s}^{-1}$

1. 1^{ère} méthode: Il faut que la pression soit telle qu'un cube de 10 cm de côté ne contienne qu'un atome d'argent.

L'équation d'état des gaz parfaits donne $PV = N k_B T$ où $N = 1$
 $V = 10^{-3} \text{ m}^3$

$P = \frac{k_B T}{V}$ $P = P_{\text{max}} = 1,8 \cdot 10^{-17} \text{ Pa}$ valeur très inférieure à ce qui a été pratiqué expérimentalement.

2^{ème} méthode: des atomes d'Argent dans la chambre ne doivent parcourir qu'une trajectoire déterministe, quasiment rectiligne. Il suffit qu'un atome d'argent ne rentre pas en collision avec une autre atome (supposé de même taille), dans le cadre d'un modèle de sphères dures.

 L'atome doit donc être seul dans le volume $V = \pi (2R)^2 L$ où $L \approx 10 \text{ cm}$
 $\Rightarrow P = \frac{k_B T}{V} \Rightarrow P = P_{\text{max}} \approx 0,6 \text{ Pa}$

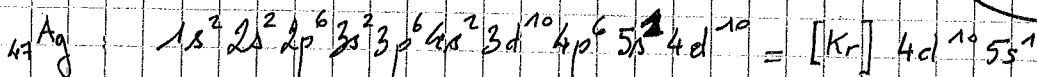
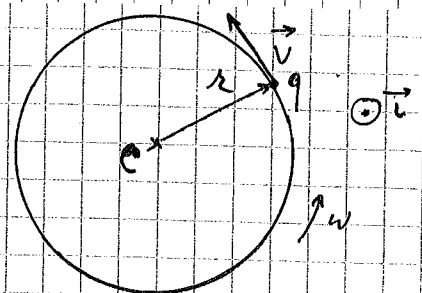
La pression adoptée dans l'expérience est bien inférieure à cette pression.

N.B.

* $\vec{L} = \vec{r} \wedge m \vec{v} = m r v \vec{e}_\phi = m r^2 \omega \vec{e}_\phi$

$\vec{M} = I \vec{\omega} = \frac{1}{2} q \pi r^2 \vec{e}_\phi = \frac{q}{2} r^2 \omega \vec{e}_\phi$

$\Rightarrow \vec{M} = \frac{q}{2m} \vec{L}$ On pose $\gamma = \frac{q}{2m}$ où $q = -e$

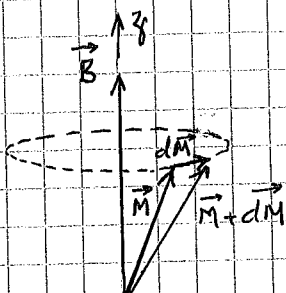


2. * Théorème du moment cinétique: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ où $\vec{\tau} = \vec{M} \wedge \vec{B}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \wedge \vec{B} \rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{d\vec{M}}{dt} = -\vec{B} \wedge \vec{M} \rightarrow \frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{M}$

* $\frac{d\|\vec{M}\|^2}{dt} = 2\vec{M} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{M} \cdot (-\gamma \vec{B} \wedge \vec{M}) = 0$ donc $\|\vec{M}\| = \text{cte}$

* $d\vec{M} = (-\gamma \vec{B} \wedge \vec{M}) dt$ donc $d\vec{M} \perp (\vec{M}, \vec{B})$



L'accroissement $d\vec{M}$ étant perpendiculaire au plan $(\vec{M}, \vec{B})$
 le vecteur $\vec{M}$ décrit un cône d'axe $\vec{B}$.
 On dit que $\vec{M}$ précesse autour de $\vec{B}$.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{M} = \vec{\omega} \wedge \vec{M}$$

Cette expression évoque la relation cinématique d'un mouvement circulaire

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Ici $\vec{\omega} = -\gamma \vec{B}$: vecteur rotation de $\vec{M}$.

A.N: $\omega = \frac{e}{2m} B \rightarrow \omega = 8,8 \cdot 10^{10} \text{ rad.s}^{-1}$

22. Comparons la durée $\tau \approx \frac{h}{\mu}$ de traversée de l'atome et la période d'oscillation de M_x et de M_y $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 10^{-10} \text{ s}$

$$\tau \approx 10^{-9} \text{ s}$$

$T \ll \tau$ donc $\langle M_x \rangle \approx 0$
 et $\langle M_y \rangle \approx 0$

L'action de $\vec{B}$ se manifestera donc sur M_z .

3. * Le champ magnétique étant à flux conservatif, le champ est le plus intense là où les lignes de champ sont les plus serrées donc au voisinage du pôle Nord de l'aimant.

* $B_z < 0$; $\frac{\partial B_z}{\partial z} > 0 \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} < 0$

NB: Les lignes de champ ne restent pas parallèles à un des axes (Oz) ou (Ox) donc $\vec{B}$ a deux composantes non nulles B_x et B_z .
 De plus, les équations de Maxwell nécessitent que B_x et B_z dépendent de x et z .
 Ainsi $\vec{B} = B_x(x, z) \vec{e}_x + B_z(x, z) \vec{e}_z$

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{et } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) \vec{e}_y = 0$$

4. Energie potentielle d'un dipôle magnétique dans un champ $\vec{B}$: $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$

$$E_p = -\text{grad}(\vec{M} \cdot \vec{B}) = \vec{M} \wedge \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \wedge \text{rot } \vec{M} + (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{M} + (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}$$

$\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$ en l'absence de courant.
 $\vec{M}$ n'est pas un champ ici donc $\text{rot } \vec{M} = \vec{0}$ et $(\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{M} = \vec{0}$.

$$\rightarrow \vec{F} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B} = M_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = M_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z \right)$$

L'atome pénètre dans l'entrefer selon (Oy) incliné dans le plan de symétrie du champ $\vec{B}$ donc $B_x(x=0) = 0$

$\rightarrow \vec{F} = M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z$ En effet, sur l'axe (Oy) $\vec{B} = B_z(z) \vec{e}_z$
 $\vec{F} = -\text{grad } E_p = M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z$

51. Appliquons la 2^e loi de Newton à un atome d'Ag dans le référentiel galiléen du laboratoire.

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad \text{ou on néglige le poids devant } \vec{F}.$$

$$m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

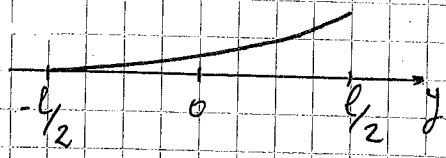
Intégrons compte tenu des conditions initiales
 $\vec{v} = u \vec{e}_y$
 $x(0) = 0, y(0) = -l/2$
 $z(0) = 0$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= u \cdot t - \frac{l}{2} \\ z &= \frac{1}{2} \frac{K}{m} M_z t^2 \end{aligned}$$

d'où $z(y) = \frac{1}{2} \frac{K}{m} M_z \left(\frac{y + l/2}{u} \right)^2$ Equation d'une parabole

Pour $M_z K > 0$.

50. Après l'entrée, l'atome d'Ag est isolé, il a donc un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$ ($y = l/2$).



$$\vec{v}(y = l/2) = \begin{vmatrix} \dot{x}(y = l/2) \\ \dot{y}(y = l/2) \\ \dot{z}(y = l/2) \end{vmatrix}$$

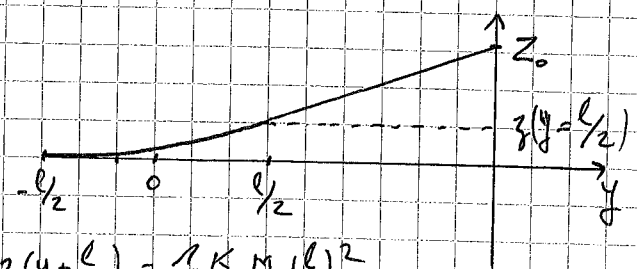
$$y = l/2 \rightarrow t = \frac{l}{u}$$

$$z(y = l/2) = \frac{1}{2} \frac{K}{m} M_z \left(\frac{l}{u} \right)^2$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ u \\ \frac{K}{m} M_z t \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(y = l/2) = \begin{vmatrix} 0 \\ u \\ \frac{K}{m} M_z \frac{l}{u} \end{vmatrix}$$

L'équation de la trajectoire est de la forme $z = b(y - l/2) + c$



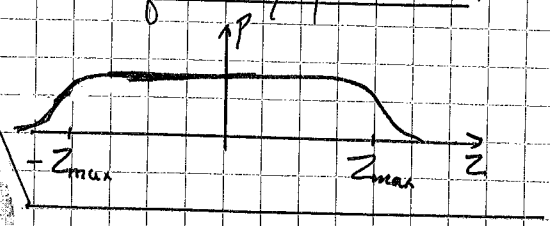
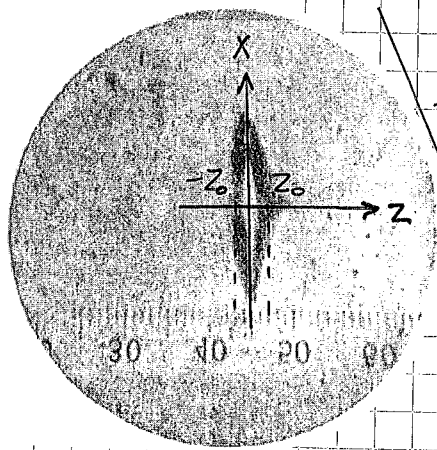
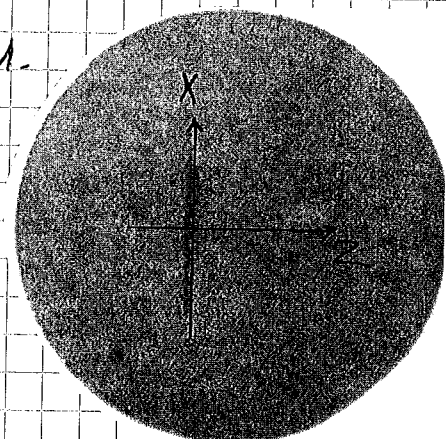
où $b = \frac{v_z(y = l/2)}{v_y(y = l/2)} = \frac{K}{m} M_z \frac{l}{u^2}$ et $c = z(y + l/2) = \frac{1}{2} \frac{K}{m} M_z \left(\frac{l}{u} \right)^2$

$$z = \frac{K}{m} M_z \frac{l}{u^2} y \quad ; \quad z_0 = z(D) = \frac{K}{m} M_z \frac{lD}{u^2}$$

S'obtient directement du résultat 3.3 quand $y = l/2 = D$

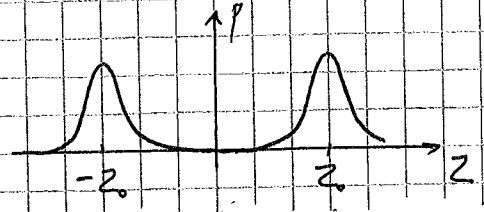
6. A priori, l'orientation de $\vec{M}$ est aléatoire dans le modèle classique. Donc $-||\vec{M}|| \leq M_z \leq +||\vec{M}||$. Les atomes d'Ag percent l'écran aux cotes z_0 telles que $-z_{max} \leq z_0 \leq +z_{max}$ de façon équiprobable.

7.1.



- * En l'absence de champ magnétique les atomes d'Ag sont isolés. Ils suivent des trajectoires rectilignes horizontales et percent donc l'écran à la cote $z=0$.
- * En présence d'un gradient de champ magnétique, ils percent l'écran en deux endroits de cotes $-z_0$ et z_0 de façon équiprobable entre 2 cotes symétriques $-z_{max}$ et $+z_{max}$ comme le prévoit le modèle classique.

M_z est donc quantifié et prend 2 valeurs : $-M_{z0}$ et $+M_{z0}$.
 Cette expérience met en évidence la quantification spatiale (du moment cinétique $\vec{L} = \frac{\vec{M}}{\gamma}$) en présence d'un champ magnétique.



2. On mesure sur la photo $z_0 = 0,1 \text{ mm}$

N.B. : $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$

$$M_{z0} = \frac{mv^2}{4k_B T} z_0 \quad M_{z0} = \frac{3k_B T}{4k_B T} z_0 \rightarrow M_{z0} = \frac{3}{2} 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

D'après 2.1. $\vec{M} = \gamma \vec{L} = \frac{e}{2m_e} \vec{L} \rightarrow M_z = \frac{e}{2m_e} L_z \rightarrow L_z = \frac{2m_e}{e} M_z$

Or il s'agit d'un électron "s" donc $m=0 \rightarrow L_z = m\hbar = 0$

Il y a un paradoxe.

On le lève en affirmant que l'expérience met en évidence l'existence d'un moment magnétique intrinsèque à l'électron : le moment magnétique de spin.

