Eclipses du Soleil et ondes dans l'atmosphère
Mines 2024 PC II

I- Les éclipses du Soleil et de la Lune

I-A Le système Soleil, Terre, Lune

1) Le barycentre G du système Terre-Lune est défini par l'équation :

$$M_T\overrightarrow{GT}+M_L\overrightarrow{GL}=\vec{0}$$

Soit :
$$M_T\overrightarrow{GT}+M_L\left(\overrightarrow{GT}+\overrightarrow{TL}\right)=\vec{0}$$

D'où :
$$\overrightarrow{TG}=\frac{M_L}{M_T+M_L}\overrightarrow{TL}$$

On en déduit la distance :
$$\boxed{D_{GT}=\frac{M_L}{M_T+M_L}D_{TL}}$$

AN $D_{GT}=\dfrac{7,4}{6,0.10^2+7,4}\times 3,8.10^8\,m$ soit $\boxed{D_{GT}=4,6.10^6\,m}$

Cette valeur est inférieure au rayon de la Terre et dans la suite on confond G avec le centre d'inertie de la Terre.

2) On se place dans le **référentiel héliocentrique** (R_O) supposé galiléen.

Le système étudié est le point matériel G, de masse M_T+M_L, soumis uniquement à la force gravitationnelle exercée par le Soleil :

$$\overrightarrow{F_g}=-\frac{\mathcal{G}M_s\left(M_T+M_L\right)}{D_{TS}^2}\frac{\overrightarrow{OG}}{D_{TS}}$$

On lui applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\left(M_T+M_L\right)\overrightarrow{a_G}=\overrightarrow{F_g}$$

Le mouvement de G est supposé **circulaire uniforme**, donc :

$$\overrightarrow{a_G}=-\omega_0^2D_{TS}\frac{\overrightarrow{OG}}{D_{TS}}$$

Ainsi : $$-(M_T+M_L)\omega_0^2 D_{TS}\frac{\overrightarrow{OG}}{D_{TS}} = -\frac{\mathcal{G}M_s(M_T+M_L)}{D_{TS}^2}\frac{\overrightarrow{OG}}{D_{TS}}$$

D'où : $$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_s}{D_{TS}^3}}}$$

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ est la **période de révolution** de la Terre (ou du système Terre-Lune) autour du Soleil et vaut environ 365 jours ou **une année**.

3) Le **référentiel barycentrique (R_g)** est **en translation** (circulaire) par rapport au référentiel (R_O) supposé galiléen. Les forces d'inertie de Coriolis y sont donc nulles.

4) La **force d'inertie d'entraînement** exercée sur la Lune a pour expression :

$$\overrightarrow{f_e} = -M_L\overrightarrow{a_e}(L)$$

(R_g) étant **en translation** par rapport à (R_O), l'accélération d'entraînement est identique en tout point (mais dépend du temps). On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_e}(L) &= \overrightarrow{a_e}(G)\\ &= \overrightarrow{a_{/(R_O)}}(G)\\ &= -\omega_0^2\overrightarrow{OG}\end{aligned}$$

Ainsi : $$\boxed{\overrightarrow{f_e} = M_L\omega_0^2\overrightarrow{OG}}$$

On en déduit : $$\boxed{f_e = M_L\omega_0^2 D_{TS}}$$

La **force gravitationnelle** exercée par la Terre sur la Lune vaut :

$$\boxed{\overrightarrow{f_T} = -\frac{\mathcal{G}M_TM_L}{D_{TL}^2}\frac{\overrightarrow{TL}}{D_{TL}}}$$

Ainsi : $$\boxed{f_T = \frac{\mathcal{G}M_TM_L}{D_{TL}^2}}$$

On en déduit : $$\frac{f_e}{f_T} = \frac{\omega_0^2 D_{TS}D_{TL}^2}{\mathcal{G}M_T}$$

On reporte l'expression de ω_0, d'où : $$\boxed{\frac{f_e}{f_T}=\frac{M_S}{M_T}\left(\frac{D_{TL}}{D_{TS}}\right)^2}$$

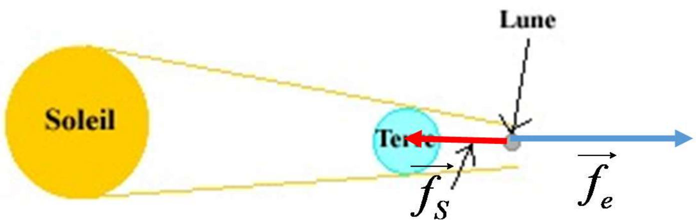
Ce rapport est de l'ordre de : $$\frac{f_e}{f_T}=\frac{2.10^{30}}{6.10^{24}}\left(\frac{4.10^8}{1{,}5.10^{11}}\right)^2$$ soit **un peu plus de 2**.

On ne peut donc pas négliger **la force d'inertie d'entraînement** pour étudier le mouvement de la Lune dans le **référentiel barycentrique** du système $\{$Terre, Lune$\}$.

5) $\overrightarrow{f_m}$ est la **force de marée** exercée par le Soleil sur la Lune dont on étudie le mouvement dans le référentiel barycentrique (non galiléen) du système $\{$Terre, Lune$\}$.

Dans le cas d'un alignement Soleil, Terre, Lune, les deux forces sont de même direction, mais en sens opposés :

$$\overrightarrow{f_m}=M_L\omega_0^2 D_{TS}\frac{\overrightarrow{OT}}{D_{TS}}-\frac{\mathcal{G}M_sM_L}{\left(D_{TS}+D_{TL}\right)^2}\frac{\overrightarrow{OT}}{D_{TS}}$$



La première force est plus intense que la deuxième et la force de marée est alors dans le même sens que $\dfrac{\overrightarrow{OT}}{D_{TS}}$. On en déduit : $$F_m=M_L\omega_0^2 D_{TS}-\frac{\mathcal{G}M_sM_L}{\left(D_{TS}+D_{TL}\right)^2}$$

Donc : $$F_m=\frac{\mathcal{G}M_sM_L}{D_{TS}^2}-\frac{\mathcal{G}M_sM_L}{\left(D_{TS}+D_{TL}\right)^2}$$

Soit : $$F_m=\frac{\mathcal{G}M_sM_L}{D_{TS}^2}\left(1-\frac{1}{\left(1+\dfrac{D_{TL}}{D_{TS}}\right)^2}\right)$$

Etant donné que $\dfrac{D_{TL}}{D_{TS}}<<1$, on peut retenir : $$\frac{1}{\left(1+\dfrac{D_{TL}}{D_{TS}}\right)^2}\simeq 1-2\frac{D_{TL}}{D_{TS}}$$

On en déduit : $$\boxed{F_m = \frac{2\mathcal{G} M_s M_L D_{TL}}{D_{TS}^3}}$$

Ainsi : $$\boxed{\frac{F_m}{f_T} = 2\frac{M_s}{M_T}\left(\frac{D_{TL}}{D_{TS}}\right)^3}$$

AN $$\frac{F_m}{f_T} \simeq 2\frac{2.10^{30}}{6.10^{24}}\left(\frac{4.10^8}{1,5.10^{11}}\right)^3$$ soit $$\boxed{\frac{F_m}{f_T} \simeq 10^{-2}}$$

Ce rapport est suffisamment faible par rapport à 1 pour que la Lune reste « **capturée par la Terre** », malgré les **effets de marée** exercés par le Soleil.

I.B Les éclipses du Soleil par la Lune

6) Pendant la durée $T_1^{'}$, le rayon vecteur Terre-Lune décrit un angle :

$$2\pi\frac{T_1^{'}}{T_1} = 2\pi + 2\pi\frac{T_1^{'}}{T_0}$$

ce qui correspond à une révolution complète autour de la Terre, complétée par l'angle décrit en la même durée par le rayon vecteur Terre-Soleil.

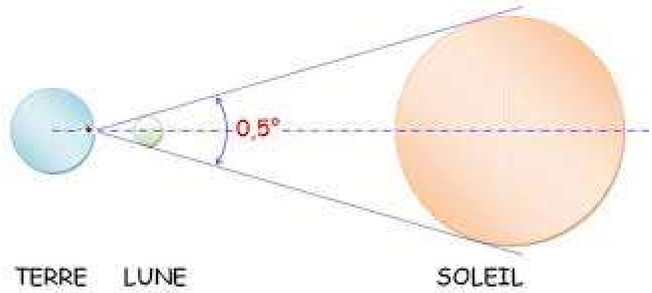
Qu'attend exactement l'énoncé ? (il y a une coquille puisque T_1 apparaît deux fois)

- si on veut $\frac{T_1^{'}}{T_1}$, un d.l. n'est pas nécessaire car : $\boxed{\frac{T_1^{'}}{T_1} = 1 + \frac{T_1^{'}}{T_0}}$ donc : $\boxed{\frac{T_1^{'}}{T_1} = \frac{40}{37}}$

- si on veut $\frac{T_1}{T_1^{'}}$: $\frac{T_1}{T_1^{'}} = \frac{1}{1+\frac{T_1^{'}}{T_0}}$ et un d.l. conduit à $\frac{T_1}{T_1^{'}} \simeq 1 - \frac{T_1^{'}}{T_0}$ d'où : $\boxed{\frac{T_1}{T_1^{'}} \simeq \frac{34}{37}}$

7) On voit le Soleil sous un angle : $$\theta_S = 2\arcsin\left(\frac{R_S}{D_{TS}}\right)$$

Cet angle étant faible en radian : $$\boxed{\theta_S \simeq 2\frac{R_S}{D_{TS}}}$$



On en déduit : $\theta_S \simeq 2\dfrac{7.10^8}{1,5.10^{11}} = 9.10^{-3} rad$ soit $\boxed{\theta_S \simeq 0,5^\circ}$

De même, la Lune est vue de la Terre sous un angle :

$$\theta_L \simeq 2\frac{R_L}{D_{TL}} \qquad \theta_S \simeq 2\frac{1,7.10^6}{3,8.10^8} = 9.10^{-3} rad \quad \text{soit} \quad \boxed{\theta_L \simeq 0,5^\circ}$$

Le Soleil et la Lune sont vus de la Terre sous le même angle apparent, ce qui permet des éclipses solaires totales (ou parfois annulaires, car la distance Terre-Lune n'est pas constante).

En ignorant la rotation propre de la Terre, l'ombre se déplace à la surface de la Terre d'**ouest en est** (en accord avec la **figure 2**) et à la vitesse :

$$\boxed{\omega_1' D_{TL} \simeq 9,5.10^2 m.s^{-1}}$$

Cependant, du fait de la rotation propre de la Terre, un point à sa surface, à l'équateur, a une vitesse dans le même sens : $\boxed{\omega_J R_T \simeq 4,5.10^2 m.s^{-1}}$

La rotation propre de la Terre permet à un point fixe à la surface de la Terre de « suivre » le déplacement du cône d'ombre, mais à une vitesse insuffisante. La vitesse « apparente » de déplacement de l'ombre, dans un référentiel lié à la Terre, est environ divisée par 2 par rapport à la valeur calculée en ignorant la rotation propre de la Terre.

II- Ondes dans les fluides

II-A Le modèle fluide utilisé

8) $\overrightarrow{f_{autres}}$ est une **résultante volumique** de forces :

- autres que de contact (les seules actions de contact dans un fluide en écoulement parfait sont celles de pression, d'équivalent volumique $-\overrightarrow{grad}P$) ;
- autres que de pesanteur ;

Il pourrait par exemple s'agir de forces d'inertie si l'écoulement est étudié dans un référentiel non galiléen.

$\overrightarrow{f_{autres}}$ est une **force volumique** et a donc pour unité SI le $N.m^{-3} = kg.m^{-2}.s^{-2}$.

9) L'**accélération convective** a pour expression :

$$\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \overrightarrow{grad}\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{rot}\vec{v}\right)\wedge\vec{v}$$

On suppose ici l'**écoulement irrotationnel**. Par conséquent, $\overrightarrow{grad}\frac{v^2}{2} = \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}$ se confond **dans le cas étudié** avec l'**accélération convective**.

Ce terme est homogène à une force volumique divisée par une masse volumique, donc à une force massique ou encore à une **accélération**. Son unité SI est donc le $m^2.s^{-1}$.

10) Considérons une longueur caractéristique L et une durée caractéristique T sur lesquelles les champs varient dans le fluide. En ordre de grandeur :

$$\left\|\overrightarrow{grad}\frac{v^2}{2}\right\| \simeq \frac{v^2}{2L} \qquad \text{et} \qquad \left\|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\| \simeq \frac{v}{T}$$

Le rapport entre le premier et le deuxième terme est donc de l'ordre de :

$$\frac{1}{2}\frac{v}{\left(\frac{L}{T}\right)} = \frac{1}{2}\frac{v}{c}$$

Si $\frac{v}{c} << 1$, on peut donc linéariser l'équation d'Euler.

11) L'équation locale de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\vec{v}\right) = 0$$

II-B Ondes acoustiques

12) Un **gaz parfait** en évolution **isentropique** et de rapport de capacités thermiques constant suit la **loi de Laplace** : $PV^\gamma = Cte$

En différentiant logarithmiquement : $\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} = 0$

On en déduit : $-\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{V}{\gamma P}$

Ainsi : $$\boxed{\chi = \frac{1}{\gamma P_0}}$$

13) L'équation de **Q11** est linéarisée en : $$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 div\left(\vec{v}\right) = 0$$

On y reporte les représentations complexes et on simplifie par $\exp\left(i\left(\omega t - kx\right)\right)$, d'où :

$$i\omega A - ik\rho_0 \underline{V_0} = 0$$

Ainsi : $$\boxed{\underline{V_0} = \frac{\omega}{\rho_0 k} A}$$

14) L'équation d'Euler s'écrit :

$$\left(\rho_0 + \delta\rho\right)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left(\rho_0 + \delta\rho\right)\vec{g} - \overrightarrow{grad}P_0 - \overrightarrow{grad}\left(\delta P\right)$$

A l'équilibre : $$\rho_0 \vec{g} - \overrightarrow{grad}P_0 = \vec{0}$$

D'où : $$\left(\rho_0 + \delta\rho\right)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \delta\rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}\left(\delta P\right)$$

S'il n'y a pas de restriction sur la direction de propagation, on néglige le terme $\delta\rho\vec{g}$, ce qui revient à négliger les effets de la pesanteur **sur la propagation** de l'onde. Dans le cas étudié, l'onde se propage selon (Ox) et $\delta\rho\vec{g}.\vec{e_x} = 0$.

De plus, on retient l'approximation : $$\left(\rho_0 + \delta\rho\right)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

L'équation d'Euler **linéarisée** s'écrit donc :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\left(\delta P\right)$$

Cependant : $$\delta P = \frac{1}{\rho_0 \chi}\delta\rho$$

D'où : $$\rho_0^2 \chi \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\left(\delta\rho\right)$$

On y reporte les représentations complexes des champs et on simplifie par $\exp\left(i\left(\omega t - kx\right)\right)$, d'où : $$i\omega\rho_0^2\chi\underline{V_0} = ikA$$

On reporte l'expression de $\underline{V_0}$ établie dans **Q14**, d'où :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k^2}{\rho_0\chi}}$$

La vitesse de phase, définie par $\frac{\omega}{k}$, vaut $\frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi}}$.

Elle est indépendante de la pulsation et la propagation n'est donc **pas dispersive**.

15) La propagation n'étant pas dispersive, la vitesse de groupe $\frac{d\omega}{dk}$ est égale à la vitesse précédente. On en déduit : $$v_g = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

AN $$\boxed{v_g = 3{,}5.10^2 m.s^{-1}}$$

II.C Ondes de gravité

16) On suppose, d'une part que les oscillations de l'interface sont de (très) **faible amplitude** par rapport à l'échelle de hauteur de l'atmosphère (évalué dans la partie **III** !), d'autre part que l'air occupe un **domaine illimité** au-dessus de l'interface.

L'écoulement est **irrotationnel** et il existe donc un champ scalaire tel que :

$$\vec{v} = \overrightarrow{grad}\, A$$

Ce champ scalaire est défini **à une fonction du temps près.**

17) L'écoulement de l'eau est **incompressible**, donc : $$div\vec{v} = 0$$

On y reporte la relation de la question précédente, d'où :

$$\boxed{\Delta A = 0}$$

D'après l'équation d'Euler, écrite en notant que l'écoulement est irrotationnel :

$$\rho_0\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\frac{v^2}{2}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \rho_0\vec{g}$$

Dans une approximation linéaire, on néglige le terme $\overrightarrow{grad}\dfrac{v^2}{2}$ et on reporte l'expression de la vitesse en fonction du potentiel :

$$\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{grad} A}{\partial t} = -\overrightarrow{grad} P - \rho_0 \overrightarrow{grad}(gz)$$

D'où :
$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{P}{\rho_0} + gz\right) = \vec{0}$$

On en déduit que $\dfrac{\partial A}{\partial t} + \dfrac{P}{\rho_0} + gz$ est une fonction du temps, que l'on note $f(t)$. Soit $F(t)$ une primitive de cette fonction. Considérons le potentiel des vitesses $A_2(\vec{r},t) = A(\vec{r},t) + F(t)$.

On a donc :
$$\frac{\partial A_2}{\partial t} + F'(t) + \frac{P}{\rho_0} + gz = f(t)$$

D'où :
$$\frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{P}{\rho_0} + gz = 0$$

Pour simplifier les notations, oublions l'indice du potentiel. Le champ $\dfrac{\partial A}{\partial t} + \dfrac{P}{\rho_0} + gz$ est donc uniformément nul.

On veut faire apparaître la vitesse et il faut probablement appliquer la dérivée particulaire au champ précédent uniformément nul, ce qui donne :

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{DP}{Dt} + g v_z = 0$$

Dans l'approximation linéaire :
$$\frac{D}{Dt} \simeq \frac{\partial}{\partial t}$$

D'où :
$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial t} + g v_z = 0}$$

18) On reporte l'expression proposée dans l'équation de Laplace, d'où l'équation différentielle :
$$f''(z) = k^2 f(z)$$

On suppose que $|f(z)|$ est borné dans le demi-espace $z < 0$, d'où :

$$\boxed{f(z) = f_0 \exp(kz)}$$

19) A la surface de l'eau, la pression est constamment égale à P_0, d'où :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + g v_z = 0$$

Cependant : $v_z = \frac{\partial A}{\partial z}$ et on considère cette dérivée partielle dans le plan *z*=0 : $v_z = k f_0 \exp\left(i\left(\omega t - kx\right)\right)$

Alors que, dans le même plan : $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\omega^2 f_0 \exp\left(i\left(\omega t - kx\right)\right)$

On en déduit la **relation de dispersion** : $\boxed{\omega^2 = gk}$

La vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ a pour expression $v_\varphi = \frac{g}{\omega}$ et dépend explicitement de la pulsation. La propagation est donc **dispersive**.

20) On obtient : $k = 40 m^{-1}$

D'où : $\boxed{\lambda = 0{,}15 m}$

Par conséquent : $\omega = \sqrt{gk}$ soit $\omega = 20 rad.s^{-1}$

On en déduit une fréquence : $\boxed{f = 3 Hz}$

II.D Ondes de sillage

21) Le référentiel (R') est **en translation rectiligne uniforme** à la vitesse $V_0 \overrightarrow{e_x}$ par rapport au référentiel (R₀), donc : $\vec{r}\,' = \vec{r} - Vt\overrightarrow{e_x}$

On en déduit : $\boxed{\begin{array}{l} x' = x - Vt \\ y' = y \end{array}}$

La hauteur d'eau s'écrit donc : $\boxed{Z\left(\vec{r}\,', t\right) = Z_0 \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}.\left(\vec{r}\,' + \vec{V}t\right)\right)\right)}$

22) Le niveau est stationnaire dans le référentiel (R') si la phase ne dépend pas du temps, soit : $\frac{d}{dt}\left(\omega t - \vec{k}.\left(\vec{r}\,' + \vec{V}t\right)\right) = 0$

On en déduit la condition : $\boxed{\omega = \vec{k}.\vec{V}}$

23) Notons t la durée de la propagation de O à Q. Il s'agit aussi de la durée du déplacement du bateau de O à B. On a ainsi : $OQ = v_\varphi t$

Soit : $OQ = \frac{\omega}{k} t$

Que l'on réécrit avec **Q22** : $OQ = \frac{\vec{k}}{k} . \vec{V} t$

Cependant : $\frac{\vec{k}}{k} = \frac{\overrightarrow{OQ}}{OQ}$ et $\vec{V} t = \overrightarrow{OB}$

Ainsi : $OQ = \frac{\overrightarrow{OQ}}{OQ} . \overrightarrow{OB}$

Par conséquent : $\overrightarrow{OQ}^2 = \overrightarrow{OQ} . \overrightarrow{OB}$

D'où : $\overrightarrow{OQ} . \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BQ} \right) = 0$

Soit : $\boxed{\overrightarrow{OQ} . \overrightarrow{QB} = 0}$

24) L'angle θ intervient dans le triangle OQB, rectangle en Q, d'où :

$$\sin \theta = \frac{OQ}{OB}$$

Cependant : $OQ = ct$ et $OB = Vt$

On en déduit : $\boxed{v_\varphi = V \sin \theta}$

25) La zone de visibilité de l'éclipse se déplace **d'ouest en est**.

Le sommet du cône se déplace d'environ 500 km en 10 minutes (entre 10h25 et 10h35), soit à une vitesse : $V \simeq 800 m.s^{-1}$

L'ordre de grandeur est cohérent avec celui de **Q7**, en considérant une vitesse de déplacement d'un point à la surface de la Terre plus faible que dans **Q7**, étant donné la latitude moyenne de la France.

On observe un angle : $\theta \simeq \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$

On en déduit : $\boxed{c \simeq 250 m.s^{-1}}$

Il s'agit d'une vitesse plutôt de l'ordre de grandeur de celui obtenu dans le § II-B.

III- Les sondages ionosphériques

III.A Densité électronique et fréquence de plasma

26) L'atmosphère est assimilée à un **gaz parfait**. Considérons un volume V contenant N moles de ce gaz à la température T_0. D'après l'**équation d'état** du gaz parfait :

$$P_0 V = NRT_0$$

On en déduit :

$$P_0 = \frac{N\mathcal{N}_\mathcal{A}}{V}\frac{R}{\mathcal{N}_\mathcal{A}}T_0$$

Soit :

$$P_0 = n^* k_B T_0$$

Ainsi :

$$\boxed{n^* = \frac{P_0}{k_B T_0}}$$

AN $\quad n^* = \dfrac{10^5\,Pa}{1{,}4.10^{-23}\,J.K^{-1} \times 270\,K} \quad$ soit $\quad \boxed{n^* = 2{,}7.10^{25}\,m^{-3}}$

27) L'atmosphère est à l'**équilibre mécanique**, d'où :

$$dP = -\rho(z)\,g\,dz$$

Cependant, à la température T_0, la masse volumique du gaz parfait a pour expression :

$$\rho(z) = n^*(z)\,m_0 \qquad \text{où} \qquad n^*(z) = \frac{P(z)}{k_B T_0}$$

Soit :

$$\rho(z) = \frac{P(z)\,m_0}{k_B T_0}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\frac{1}{P(z)}\frac{dP}{dz} = -\frac{m_0 g}{k_B T_0}}$$

On pose :

$$\boxed{H = \frac{k_B T_0}{m_0 g}}$$

et on intègre l'équation différentielle en : $\boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\dfrac{z}{H}\right)}$

AN $$H \simeq \frac{8,3 J.K^{-1}.mol^{-1} \times 270 K}{30 \times 10^{-3} kg.mol^{-1} \times 10 m.s^{-2}}$$ soit $\boxed{H \simeq 8 km}$

28) D'après l'énoncé, une molécule sur 1000 est ionisée. On en déduit un ordre de grandeur de la densité volumique d'ions :

$$n_{\max} \simeq 10^{-3} \times 2,7.10^{25} m^{-3} \times 10^{-10}$$ soit $\boxed{n_{\max} \simeq 2,7.10^{12} m^{-3}}$

29) L'équation de **Maxwell-Faraday** s'écrit : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Or, le champ électrique considéré est **uniforme**, donc à rotationnel nul partout. Par conséquent :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}}$$

Ainsi, le champ magnétique est **permanent**.

30) L'effet du champ magnétique étant négligé, l'électron est soumis uniquement à la force électrique $-e\vec{E}$. On applique à un électron la **deuxième loi de Newton** :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

On assimile la dérivée précédente à une dérivée locale (dans les conditions étudiées, avec un champ électrique uniforme, on s'attend à un champ des vitesses des électrons uniforme), d'où en représentation complexe :

$$i\omega m_e \underline{\vec{v}} = -eE_0 \exp(i\omega t)\overrightarrow{e_x}$$

On en déduit : $$\underline{\vec{v}} = -\frac{e}{i\omega m_e} E_0 \exp(i\omega t)\overrightarrow{e_x}$$

On néglige le mouvement des ions positifs et le vecteur densité de courant a donc pour expression : $\underline{\vec{j}} = -n_0 e \underline{\vec{v}}$

Soit : $$\boxed{\underline{\vec{j}} = \frac{n_0 e^2}{i\omega m_e} E_0 \exp(i\omega t)\overrightarrow{e_x}}$$

On identifie la conductivité complexe : $$\boxed{\underline{\gamma}(\omega) = \frac{n_0 e^2}{i\omega m_e}}$$

31) L'équation de **Maxwell-Ampère** s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

En supposant le **champ magnétique nul**, le second membre de l'équation précédente est nul aussi. On en déduit en représentation complexe :

$$\underline{\gamma}(\omega)\underline{\vec{E}} + i\omega\varepsilon_0\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

Cette équation ne peut être vérifiée par un champ électrique oscillant que si :

$$\underline{\gamma}(\omega) + i\omega\varepsilon_0 = 0$$

Soit : $$\frac{n_0 e^2}{i\omega m_e} + i\omega\varepsilon_0 = 0$$

Donc : $\omega = \omega_p$ en posant $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}}$

Par ailleurs, un champ électrique oscillant à cette pulsation provoque des oscillations des électrons à la même pulsation en accord avec la relation $\underline{\vec{v}} = -\frac{e}{i\omega m_e} E_0 \exp(i\omega t)\overrightarrow{e_x}$.

32) D'après l'énoncé : $n_0 \leq 10^{12}\, m^{-3}$

Ainsi : $\omega_p \leq 5{,}6.10^7\, rad.s^{-1}$ donc $\boxed{f_p \leq 9.10^6\, Hz}$

Cette fréquence correspondrait à une longueur d'onde d'environ 30 m dans le vide. Il s'agit du domaine **hertzien** (ou **ondes radio**).

III.B Propagation d'ondes électromagnétiques dans l'atmosphère

33) On identifie à gauche l'accélération de la particule (multipliée par sa masse) et à droite les termes suivants :

$im_e\omega\vec{v}$	Accélération
$-e\vec{E}$	force électrique
$-m_e\frac{\omega_0^2}{i\omega}\vec{v}$	représentation complexe d'une **force de rappel élastique** $-m_e\omega_0^2\vec{r}$ du **modèle de l'électron élastiquement lié** (adopté pour étudier un milieu **diélectrique**)
$-\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$	force dissipative (prenant en compte l'effet du rayonnement de la particule chargée accélérée)

La force magnétique $-e\vec{v}\wedge\vec{B}$ est négligée par rapport à la force électrique $-e\vec{E}$. Si on suppose le milieu suffisamment peu dense, on a en première approximation :

$$\left\|\vec{B}\right\| \simeq \frac{\left\|\vec{E}\right\|}{c}$$

(l'égalité serait exacte pour une OPPH se propageant dans le vide)

On a donc : $$\frac{\left\|-e\vec{v}\wedge\vec{B}\right\|}{\left\|-e\vec{E}\right\|} \leq \frac{\left\|\vec{v}\right\|\left\|\vec{B}\right\|}{\left\|\vec{E}\right\|} \simeq \frac{\left\|\vec{v}\right\|}{c}$$

Ce rapport est faible devant 1 si l'électron **n'est pas relativiste**. Cette approximation est raisonnable pour un électron lié d'une couche atomique « périphérique ».

La constante τ pourrait s'interpréter comme une **durée de relaxation**.

Dans le cas où $\tau \to \infty$, il n'y a pas de phénomène dissipatif et on s'attend à ce que le milieu ne soit pas absorbant.

34) L'énoncé précise que le milieu est **localement neutre**. Or, d'après l'équation de **Maxwell-Gauss** : $$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On a donc : $$div\vec{E} = 0$$

Or, en représentation complexe, pour le champ électrique considéré :

$$div\underline{\vec{E}} = -i\vec{k}.\underline{\vec{E}}$$

Ainsi : $\boxed{\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0}$ et le champ électrique est donc **transverse**.

De même, on déduit de l'équation de Maxwell-Thomson la transversalité du champ magnétique.

On déduit de l'équation (3) : $$\underline{\vec{v}} = -\frac{e}{im_e\left(\omega - \dfrac{\omega_0^2}{\omega}\right)}\underline{\vec{E}}$$

Par conséquent : $$\underline{\vec{j}} = \frac{n_0 e^2 \omega}{im_e\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}\underline{\vec{E}}$$

Soit : $$\underline{\vec{j}} = \frac{n_0 e^2}{m_e\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

On peut donc écrire l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{B}} = \mu_0\left(\frac{n_0 e^2}{m_e\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}+\varepsilon_0\right)\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

Ou encore : $$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{B}} = \frac{1}{c^2}\left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}}$$

(ce qui revient à déterminer la permittivité relative d'un milieu diélectrique dans ce modèle sommaire, applicable à un milieu peu dense ; mais de toute façon pas vraiment au programme…)

D'après l'équation de **Maxwell-Faraday** : $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$

On reporte cette expression dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$-i\vec{k}\wedge\frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega} = i\omega\frac{1}{c^2}\left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\underline{\vec{E}}$$

$$-i\frac{\left(\left(\vec{k}.\underline{\vec{E}}\right)\vec{k}-\vec{k}^2\underline{\vec{E}}\right)}{\omega} = i\omega\frac{1}{c^2}\left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\underline{\vec{E}}$$

On a justifié $\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$, d'où : $$\boxed{\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)}$$

35) Ainsi : $$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

La vitesse de phase est définie par $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ et l'indice a donc pour expression :

$$N = \sqrt{1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

Cependant, si $\omega_p << \omega << \omega_0$:

$$1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\frac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\simeq 1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

On en déduit l'expression approchée : $\boxed{N\simeq 1+\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$

Cet indice dépend de la pulsation et la propagation est donc **dispersive**.

De plus, on peut réécrire l'expression précédente en faisant apparaître la longueur d'onde (dans le vide) λ correspondant à la pulsation ω :

$$N\simeq A+\frac{B}{\lambda^2}$$

en posant : $A=1+\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$ et $B=\frac{2\pi^2\omega_p^2c^2}{\omega_0^4}$

On retrouve ainsi la **loi de Cauchy**.

36) Si $\omega_0=0$, alors : $\boxed{k^2=\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}}$

On retrouve la relation de dispersion d'un **plasma dilué** (« non collisionnel »). L'hypothèse $\omega_0=0$ revient à ignorer la force de rappel élastique, donc à considérer des électrons libres et l'hypothèse $\tau\to\infty$ revient à considérer le plasma non collisionnel (en passant par des étapes qui n'étaient probablement pas nécessaires et qui sont discutables au regard du modèle de propagation dans un plasma effectivement au programme de PC ; par ailleurs, peut-on vraiment donner la même signification à τ dans l'équation diélectrique de l'énoncé et dans le cas du plasma ?).

Le milieu est **transparent** si : $\boxed{\omega>\omega_p}$ donc $f>f_p=\frac{\omega_p}{2\pi}$

La **vitesse de phase** a alors pour expression : $\boxed{v_\varphi=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}}$

Elle dépend explicitement de la pulsation et la propagation est donc **dispersive**.

III.C Echo ionosphérique

37) On applique la **relation de structure** à chacune des trois ondes, les deux premières se propageant dans un milieu assimilé au **vide**, la troisième dans le **plasma ionosphérique** :

Onde incidente	$z<0$	$\overrightarrow{\underline{B}_i}(M,t)=\dfrac{\overrightarrow{e_z}\wedge E_0\exp\left(i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right)\overrightarrow{e_x}}{c}$	$\overrightarrow{\underline{B}_i}(M,t)=\dfrac{E_0}{c}\exp\left(i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right)\overrightarrow{e_y}$
Onde réfléchie		$\overrightarrow{\underline{B}_r}(M,t)=\dfrac{-\overrightarrow{e_z}\wedge \underline{\rho}E_0\exp\left(i\omega\left(t+\frac{z}{c}\right)\right)\overrightarrow{e_x}}{c}$	$\overrightarrow{\underline{B}_r}(M,t)=-\underline{\rho}\dfrac{E_0}{c}\exp\left(i\omega\left(t+\frac{z}{c}\right)\right)\overrightarrow{e_y}$
Onde transmise	$z>0$	$\overrightarrow{\underline{B}_t}(M,t)=\dfrac{k\overrightarrow{e_z}\wedge \underline{\beta}E_0\exp\left(i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right)\overrightarrow{e_x}}{\omega}$	$\overrightarrow{\underline{B}_t}(M,t)=\underline{\beta}\dfrac{k}{\omega}E_0\exp\left(i\left(\omega t-kz\right)\right)\overrightarrow{e_y}$

Il y a continuité du champ électrique (ici tangentiel de part et d'autre de l'interface) et du champ magnétique en $z=0$, soit après simplification par $\exp(i\omega t)$, d'où les deux équations :

$$1+\underline{\rho}=\underline{\beta}$$
$$1-\underline{\rho}=\frac{kc}{\omega}\underline{\beta}$$

En considérant la combinaison linéaire $\dfrac{kc}{\omega}(1)-(2)$, on obtient :

$$\frac{kc}{\omega}+\frac{kc}{\omega}\underline{\rho}=1-\underline{\rho}$$

D'où :

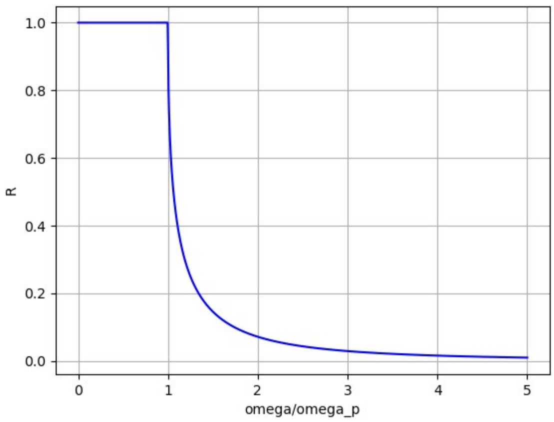
$$\boxed{\underline{\rho}=\frac{1-\frac{kc}{\omega}}{1+\frac{kc}{\omega}}}$$

Il faut alors distinguer deux cas selon la pulsation :

Pulsation	k	$\underline{\rho} = \dfrac{1 - \dfrac{kc}{\omega}}{1 + \dfrac{kc}{\omega}}$
$\omega < \omega_p$	$k = -i\dfrac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$	$\boxed{\underline{\rho} = \dfrac{1 + i\sqrt{\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1}}{1 - i\sqrt{\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1}}}$
$\omega > \omega_p$	$k = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$	$\boxed{\underline{\rho} = \dfrac{1 - \sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}}$

38) La grandeur $R = \left|\underline{\rho}\right|^2$ est le coefficient de réflexion en puissance (ou en énergie).

On obtient l'allure suivante en fonction de $\dfrac{\omega}{\omega_p}$:



Il y a un écho ionosphérique (total) si la pulsation est inférieure à la pulsation plasma.

39) Il faut choisir une durée de l'impulsion faible devant la durée de propagation sur l'aller-retour, soit :
$$\Delta t << \frac{2h}{c}$$

En fait, la vitesse de propagation dans la partie transparente du plasma (la base de l'ionosphère) est plus faible (il faut alors considérer la vitesse de groupe dans le plasma).