Proposition de corrigé du sujet Centrale PC Physique 2 2024

Corrigé proposé par Mickaël Loire et Marc Legendre.

Q1 Par définition, le poids est la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement (ici due à la rotation de la planète Mars sur elle-même). La force d'inertie d'entraînement est probablement ici négligeable (l'énoncé ne donne pas de données).

Q2 $\boxed{\overrightarrow{F}_{q1/q2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^3}\overrightarrow{M_1M_2}}$

Q3 Analogies électrostatiques/gravitationnelles :

Électrostatique	Gravitation
q	m
ρ	ρ
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$

Théorème de Gauss gravitationnel :

$$\mathrm{div}(\vec{g}) = -4\pi G\rho \qquad \Leftrightarrow \qquad \oiint \vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

Q4 La distribution de masses est :
- invariante par rotation d'angles θ et ϕ quelconques.
- Par les plans de symétries : $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\phi})$

Ainsi $\boxed{\vec{g}(r,\theta,\phi) = g_r(r)\,\vec{e_r}}$.

Surface de Gauss : sphère de rayon r.

Hyp : on néglige la contribution de l'atmosphère à $\vec{g}$.

l'application du théorème de Gauss gravitationnel conduit à

$$4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi G m_m$$

$$\text{dc} \qquad g_r(r) = -\frac{Gm_m}{r^2}$$

$$\text{dc} \qquad \boxed{\vec{g}(r) = -\frac{Gm_m}{r^2}\,\vec{e_r}}$$

Q5 Au niveau du sol, $r = R_m$, $\vec{g_0} = -\frac{Gm_m}{R_m^2}\,\vec{e_r}$ donc $\boxed{\vec{g}(r) = -\left(\frac{R_m}{r}\right)^2\,\vec{g_0}}$. AN : $g_0 = 3.73\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

Q6 La force volumique de pression s'écrit : $\boxed{\vec{f} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P)}$.

Pour le système {Particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$}, dans le référentiel martien supposé galiléen, et à l'équilibre, le TRC nous donne : $\boxed{\vec{0} = \mu\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}(P)}$.

Q7 En assimilant l'atmosphère à un GP, on a $PV = nRT = \frac{mRT}{M_a}$ soit $\boxed{\mu = \frac{M_a P}{RT}}$.

D'après Q6, et après projection dans la base sphérique, on a :

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{M_a P g}{RT} \tag{1}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \tag{2}$$

$$-\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \tag{3}$$

Les lignes (2) et (3) impliquent que $P(r,\theta,\phi) = P(r)$ soit $\frac{dP}{dr} + \frac{P}{H} = 0$ avec $H = \frac{RT_0}{M_a g_0}$.
La condition aux limites $P(r = R_m) = P_0$ nous donne l'expression demandée : $\boxed{P(r,\theta,\phi) = C_0\, e^{-\frac{r-R_m}{H}}}$ avec $\boxed{H = \frac{RT_0}{M_a g_0}}$ et $\boxed{C_0 = P_0}$.

Q8 D'après les données de l'introduction relative à la composition de l'atmosphère :
$M_a = 96\% \times M_{\text{CO}_2} + 2\% \times M_{\text{Ar}} + 2\% \times M_{\text{N}_2}$. AN : $M_a = 44\,\text{g.mol}^{-1}$ et $H = 10.7\,\text{km}$.

Q9 D'après Q7, $\boxed{\mu(r,\theta,\phi) = \mu_0\, e^{-\frac{r-R_m}{H}}}$ avec $\boxed{H = \frac{RT_0}{M_a g_0}}$ et $\boxed{\mu_0 = \frac{M_a P_0}{RT_0}}$.

Q10 Déterminons m par intégration de μ. On supposera que l'hypothèse g uniforme est encore valable.

$$\begin{aligned}
m_{\text{atm}} &= \iiint_{V_{\text{int}}} \mu\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{r=R_m}^{+\infty} \mu_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}} 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
&= 4\pi\mu_0 H^3 \int_0^{+\infty} \left(u + \frac{R_m}{H}\right)^2 e^{-u}\mathrm{d}u \\
&= 4\pi\mu_0 H^3 \times \left(2 + 2\frac{R_m}{H} + \left(\frac{R_m}{H}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

En utilisant les intégrales données en fin d'énoncé.
Avec $\mu_0 H = \frac{P_0}{g_0}$, on obtient le résultat demandé : $\boxed{m_{\text{atm}} = 4\pi\frac{P_0}{g_0}\left(2H^2 + 2HR_m + R_m^2\right)}$.
AN : $m_{\text{atm}} = 2.34 \cdot 10^{16}\,\text{kg}$.

Q11 Interprétation du libre parcours moyen : il s'agit de la distance moyenne parcourue entre deux collisions.
En considérant qu'on a 1 seule particule dans le volume $a^2 l$, on a $l = \frac{M_a}{a^2 \mathcal{N}_a \mu}$. Or au niveau du sol $\mu_0 = \frac{M_a P_0}{RT_0}$ donc $\boxed{l_0 = \frac{RT_0}{a^2 \mathcal{N}_a P_0}}$. AN avec $a \approx 10^{-10}\,\text{m}$, $l_0 \approx 0.5\,\text{mm}$. Cet ordre de grandeur est plus grand que dans les CNTP car à la surface martienne, $P_0 = 600\,\text{Pa}$ et non pas $1\,\text{bar}$.

Q12 Par défintion de e, en $r = R_m + e$, on a $H = l(r = R_m + e) = \frac{M_a}{a^2 N_a \mu_0 e^{-e/H}} = l_0 e^{e/H}$. Ainsi on trouve $\boxed{e = H \ln\left(\frac{H}{l_0}\right)}$. AN : $l_0 = 1.8 \cdot 10^5\,\text{m}$

Q13 Déterminons au préalable la vitesse de libération d'une particule de masse m.
La vitesse de libération v est solution de l'équation $0 = E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_m m}{R_m+e}$. On isole $v = \sqrt{\frac{2Gm_m}{R_m+e}}$.
Avec $Gm_m = R_m^2 g_0$, on a $\boxed{v = \sqrt{\frac{2R_m^2 g_0}{R_m+e}} \approx \sqrt{2R_m g_0}}$ pour $e \ll R_m$. AN : $v \approx 5.0 \cdot 10^3\,\text{m.s}^{-1}$.
D'après la figure 2, les molécules de dihydrogène possèdent très majoritairement une vitesse supérieure à $V_{\text{libération}}$, ce qui expliquerait son absence dans l'atmosphère martienne. Par contre, les éléments les plus lourds seront conservés par l'atmosphère, c'est le cas ici du CO_2, Ar (et non pas He et Ne plus légers), et de N_2. Notons que pour les hautes couches, l'échauffement thermique dû au rayonnement solaire, peut provoquer une augmentation des vitesses et donc une « évaporation » supplémentaire.

Q14 En ordre de grandeur, en considérant une molécule par volume d^3 on a $\boxed{n^* = \frac{1}{d^3}}$. Ainsi $\boxed{\mu = \frac{M_a}{N_a d^3}}$.

Q15 Modèle continu : $d \ll e$. Or $d = \left(\frac{N_a \mu}{M_a}\right)^{-\frac{1}{3}}$ d'après Q14 et $\mu = \mu_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}}$ dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme. Ainsi $d = \left(\frac{N_a \mu_0}{M_a}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{r-R_m}{3H}}$. Il faut donc choisir $\boxed{r - R_m \ll 3H \ln\left(e\left(\frac{N_a \mu_0}{M_a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}$. AN : $r - R_m \ll 1.0 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$. Le modèle continu est notamment valable dans l'exosphère à 10% près.

Q16 En simplifiant l'équation de Navier -Stokes :

$$\begin{array}{rcl} \text{RS} & \Rightarrow & \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \\ \text{Parfait} & \Rightarrow & \eta = 0 \\ \vec{v} = v_r(r)\vec{u_r} & \Rightarrow & (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = v\frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \end{array}$$

on obtient l'équation $\boxed{\mu v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{G m_m \mu}{r^2}}$.

Q17 Pour un GP, $P = \frac{RT\mu}{M_a}$ ainsi l'équation Q15 se simplifie en $\boxed{\mu v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{RT}{M_a}\frac{\partial \mu}{\partial r} - \frac{G m_m \mu}{r^2}}$.

Q18 L'écoulement est stationnaire donc le débit massique se conserve. Sur la sphère de rayon r, où v est uniforme, on a cste$= 4\pi r^2 \mu v$ d'où $\boxed{\mu r v = \text{cste} = K}$.

Q19 En multipliant l'équation Q17 par r^2 et en réinjectant $\mu = \frac{K}{r^2 v}$, on a :

$$\begin{aligned} K\frac{dv}{dr} &= -\frac{RT}{M_a} r^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{K}{vr^2}\right) - G m_m \frac{K}{vr^2} \\ &= \frac{RTK}{M_a}\left(\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dr} + \frac{2}{vr}\right) - \frac{G m_m K}{vr^2} \end{aligned}$$

En simplifiant par K et factorisant les termes en $\frac{dv}{dr}$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} \times \left(1 - \frac{RT/M_a}{v^2}\right) &= \frac{1}{v}\left(\frac{2RT/M_a}{r} - \frac{G m_m}{r^2}\right) \\ \text{donc} \quad \frac{dv}{dr} \times \left(\frac{v^2}{RT/M_a} - 1\right) &= v\left(\frac{2}{r} - \frac{G m_m M_a / RT}{r^2}\right) \end{aligned}$$

On obtient le résultat demandé en divisant par v :

$$\boxed{\frac{1}{v}\frac{dv}{dr} \times \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{r*}{r^2}\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \sqrt{\frac{RT}{M_a}}} \quad \text{et} \quad \boxed{r^* = \frac{G m_m M_a}{2RT}}$$

Q20 Homogénéité :
$\left[\frac{RT}{M_a}\right] = \left[\frac{kT}{m}\right] = [v^2]$ donc l'expression de c est homogène.
$\left[\frac{G m_m M_a}{2RT}\right] = \left[\frac{G m_m m}{2kT}\right] = \frac{\mathrm{J.m}}{\mathrm{J}} = \mathrm{m}$ donc l'expression de r^* est homogène.
AN : $c = 200\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et $r^* = 5.35 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$

Q21 En remplaçant r par r^* dans Q19, et en notant que d'après l'énoncé $\frac{1}{v}\frac{dv}{dr}(r = r^*) \neq 0$, on obtient $v(r^*) = \pm c$. En ne gardant que la solution positive (champ des vitesses traduisant un échappement de l'atmosphère), on a $\boxed{v(r^*) = c}$.

Q22 En intégrant l'équation Q19 avec la condition aux limites précédente on obtient :

$$\boxed{\frac{v^2}{2c^2} - \ln\left(\frac{v}{c}\right) = 2\left(\ln\left(\frac{r}{r^*}\right) + \frac{r*}{r}\right) - \frac{3}{2}}$$

En considérant un point d'altitude $r = R_m + 150\,\text{km} = 3540\,\text{km}$, une résolution numérique de l'équation précédente conduit à $\underline{\frac{v}{c} = 5.5 \cdot 10^{-127} \text{ ou } \frac{v}{c} = 24}$.
La mesure expérimentale de μ donnée par la sonde MAVEN, et fournie par l'énoncé, permet de calculer les débits massiques correspondant : $\underline{D_m = 3.5 \cdot 10^{-120}\,\text{kg.s}^{-1}}$ ou $\underline{D_m = 1.5 \cdot 10^{8}\,\text{kg.s}^{-1}}$.

Le débit massique mesuré par la sonde MAVEN est de $0.1\,\text{kg.s}^{-1}$. La solution la plus grande est aberrante car très supérieure au débit expérimental ($\times 10^9$) mesurée par la sonde MAVEN ; elle correspondrait à un échappement de l'atmosphère en $\approx 10^{10}\,\text{s}$ (masse de l'atmosphère de $3.8 \cdot 10^{18}$ kg cf Q33). La solution la plus petite est également aberrante car beaucoup trop faible ; elle correspondrait à un échappement d'environ une molécule toutes les 10^{95} s.
Le modèle hydrodynamique présenté dans cette partie n'est donc pas un modèle correct de l'échappement atmosphérique.

Q23 On applique la loi de Stefan-Boltzmann au Soleil pour trouver

$$\boxed{\mathcal{P}_{s,e} = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4}$$

Q24 Par conservation de l'énergie, cette puissance se retrouve sur une sphère de rayon r_m. On en déduit que la puissance surfacique au niveau de Mars est

$$\boxed{p_{m,i} = \frac{\mathcal{P}_{s,e}}{4\pi r_m^2} = \sigma T_s^4 \frac{R_s^2}{r_m^2}}$$

Q25 La puissance absorbée est la puissance incidente moins la puissance réfléchie :

$$\mathcal{P}_{m,a} = (1-\alpha)\mathcal{P}_{m,i}$$

Comme $\mathcal{P}_{m,i} = p_{m,i}\pi R_m^2$ (surface apparente de Mars), il vient

$$\boxed{\mathcal{P}_{m,a} = (1-\alpha)\sigma T_s^4 \frac{R_s^2}{r_m^2} \pi R_m^2}$$

Q26 On applique la loi de Stefan-Boltzmann à Mars et on a

$$\boxed{\mathcal{P}_{m,e} = 4\pi R_m^2 \sigma T_m^4}$$

Q27 A l'équilibre radiatif de {Mars}, la puissance absorbée est égale à la puissance émise : $\mathcal{P}_{m,a} = \mathcal{P}_{m,e}$. On obtient alors, avec les expressions précédentes :

$$\boxed{T_m = T_s \left(\frac{(1-\alpha)R_s^2}{4r_m^2}\right)^{1/4} = 210K}$$

On trouve une valeur très proche de celle donnée dans l'énoncé.

Q28 On applique la loi de Wien au Soleil :

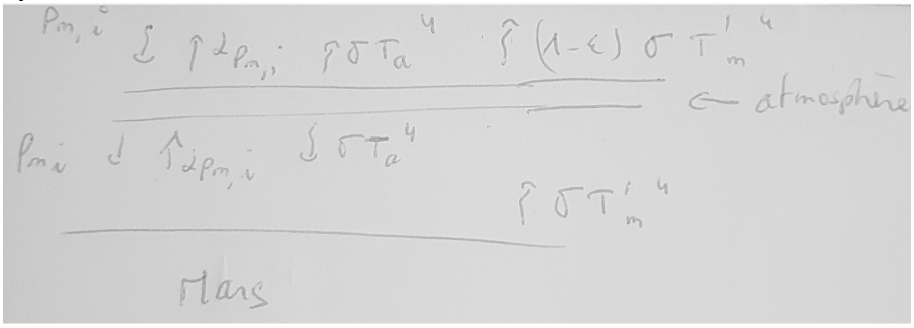
$$\boxed{\lambda_s = \frac{\beta}{T_s} = 502nm}$$

Cela correspond à un rayonnement visible jaune/vert.
On applique la loi de Wien à Mars :

$$\boxed{\lambda_m = \frac{\beta}{T_m} = 13,8\mu m}$$

Cela correspond à un rayonnement infrarouge.

Q29



Q30 On applique la condition d'équilibre radiatif à {Mars}

$$(1-\alpha)p_{m,i}\pi R_m^2 = 4\pi R_m^2\sigma(T_m^{'4} - T_a^4)$$

On applique la condition d'équilibre radiatif à {atmosphère} :

$$2\sigma T_a^4 + (1-\epsilon)\sigma T_m^{'4} = \sigma T_m^{'4}$$

On a alors $\sigma T_a^4 = \frac{\epsilon}{2}\sigma T_m^{'4}$. On injecte dans la relation précédente avec $p_{m,i} = \frac{\mathcal{P}_{s,e}}{4\pi r_m^2}$ et il vient :

$$(1-\alpha)\mathcal{P}_{s,e}\frac{1}{4r_m^2} = 4\pi\sigma T_m^{'4}(1-\frac{\epsilon}{2})$$

$$\boxed{T'_m = \left(\frac{\mathcal{P}_{s,e}(1-\alpha)}{\sigma 8\pi r_m^2(2-\epsilon)}\right)^{1/4} = \frac{T_m}{(1-\epsilon/2)^{1/4}}}$$

Q31 On a alors

$$\boxed{\epsilon = 2\left(1-\left(\frac{T_m}{T'_m}\right)^4\right) = 1,5}$$

Or $\epsilon \in [0;1]$ donc il est impossible d'atteindre 298 K en jouant seulement sur la composition de l'atmosphère.

Q32 Il faut prendre $\alpha = 0$ et $\epsilon = 1$. On trouve alors

$$\boxed{T'_m = T_s\left(\frac{R_s^2}{2r_m^2}\right)^{1/4} = 274K}$$

Même dans ces conditions, il ferait trop froid (mais on s'approche des conditions idéales pour une vie humaine).

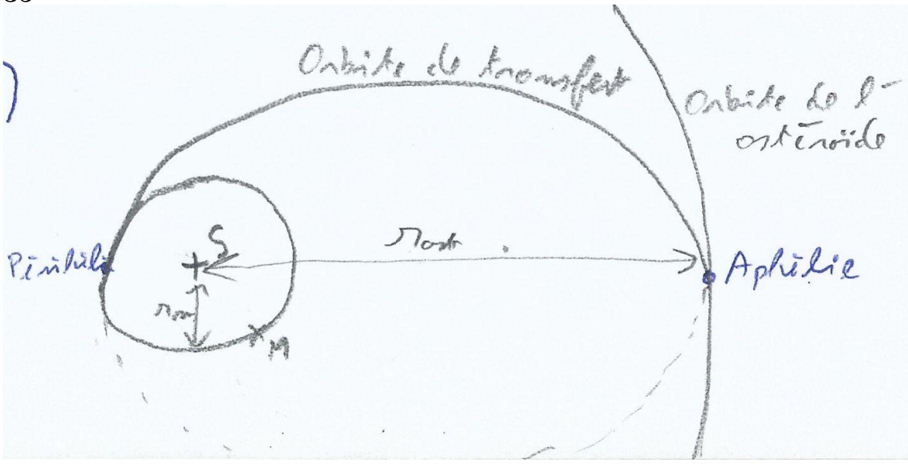
Q33 On utilise l'expression de la question 10 et on obtient

$$\boxed{m'_{atm} = \frac{P4\pi R_m^2}{g_0} = 3,9.10^{18}kg}$$

Q34 Seul le carbone serait limitant. Comme $m(CO2) = m'_{atm}\frac{M_C}{M_{CO2}}$ et il y a 2% de carbone dans l'astéroïde,

$$\boxed{m_{ast} = 50m'_{atm}\frac{M_C}{M_{CO2}} = 5,3.10^{19}kg}$$

35



36 Il y a conservation du moment cinétique puisque d'après le théorème du moment cinétique,

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = S\vec{M} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

car la force est centrale.

Il y a conservation de l'énergie mécanique puisque la force est conservative.

37 On applique le PFD à l'astéroïde dans le réferntiel héliocentrique galiléen et il vient :

$$m_p \frac{v^2}{r_p} = \frac{Gm_s m_p}{r^2}$$

On a donc $v^2 = \frac{Gm_s}{r_{ast}}$ et donc

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_s m_p}{r_{ast}} = -\frac{Gm_s m_p}{2r_{ast}}$$

38

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\vec{L}_S = S\vec{M} \wedge m_p\vec{v} = m_p r^2 \dot{\theta}\vec{e_z} = m_p C\vec{e_z}$$

39

$$E_m = -\frac{Gm_p m_s}{r} + \frac{1}{2}m_p(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) = \frac{1}{2}m_p\dot{r}^2 + E_{eff}(r)$$

$$\boxed{E_{eff}(r) = \frac{1}{2}m_p\frac{C^2}{r^2} - \frac{Gm_p m_s}{r}}$$

40 Au périhélie r_p et à l'aphélie r_a, $\dot{r} = 0$ donc les positions extrémales de la trajectoire vérifient

$$E_m = \frac{1}{2}m_p\frac{C^2}{r^2} - \frac{Gm_p m_s}{r}$$

$$r^2 + \frac{Gm_p m_s}{E_m}r - \frac{m_p C^2}{2E_m} = 0$$

On en déduit donc que le grand axe $2a = r_a + r_p = -\frac{Gm_p m_s}{E_m}$ (somme des racines de la forme $x^2 - Sx + P = 0$).

On a donc

$$\boxed{E_m = -\frac{Gm_p m_s}{2a}}$$

41 A l'aphélie, lors du passage de la trajectoire circulaire à la trajectoire elliptique, l'astéroide se "rapproche" globalement du soleil (voir schéma). Son énergie diminue donc et $\Delta v < 0$.
Du point de vue quantitatif : $\Delta Em = -\frac{Gm_S m_P}{2a} + \frac{Gm_S m_P}{2r_{\text{ast}}} < 0$ car $a < r_{\text{ast}}$

42 La variation d'énergie à l'aphélie est celle d'énergie cinétique puisque l'énergie potentielle ne varie pas.

$$\Delta E_c = \Delta E_m = -\frac{Gm_p m_s}{r_{ast} + r_m} + \frac{Gm_p m_s}{2r_{ast}} = \frac{1}{2}m_p(v_0 + \Delta v)^2 - \frac{1}{2}m_p v_0^2$$

avec $v_0^2 = \frac{Gm_s m_p}{r_{ast}}$

$$\frac{1}{2}(v_0 + \Delta v)^2 = \frac{Gm_s}{r_{ast}} - \frac{Gm_s}{r_{ast} + r_m}$$

On a finalement $\boxed{\Delta v = \sqrt{2Gm_s\left(\frac{1}{r_{ast}} - \frac{1}{r_{ast}+r_m}\right)} - \sqrt{\frac{Gm_s}{r_{ast}}} = -3160 m.s^{-1}}$

43 Première proposition de réponse :
On fait l'hypothèse que l'énergie cinétique du système {astéroïde+propulseur+matière éjectée} se conserve dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Cette hypothèse revient à négliger le travail du propulseur.

$$\frac{1}{2}m_p v_0^2 = \frac{1}{2}(m_p - \Delta m)(v_0 + \Delta v)^2 + \frac{1}{2}\Delta m(v_0 + v_e)^2$$

On a donc :

$$\Delta m = m_p \frac{v_0^2 - (v_0 + \Delta v)^2}{(v_0 + v_e)^2 - (v_0 + \Delta v)^2}$$

$v_0 = 17.10^3 m.s^{-1}$ donc on trouve $\boxed{\Delta m = 0,18.10^{19} kg}$
Il s'agit de presque 20% de la masse de l'astéroïde, ce qui ne parait pas vraiment réalisable.

Seconde proposition de réponse :
On fait l'hypothèse que la quantité de mouvement du système {astéroïde+propulseur+matière éjectée} se conserve dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Cette hypothèse revient à considérer la quantité de mouvement orthoradiale durant le bilan. En effet, elle est orthoradiale à l'aphélie alors que la force extérieure gravitationnelle est radiale donc si l'éjection de matière est rapide r varie peu et la quantité de mouvement reste orthoradiale. On a alors :

$$m_p v_0 = (m_p - \Delta m)(v_0 + \Delta v) + \Delta m(v_0 + v_e)$$

On obtient alors :

$$\Delta m = m_p \frac{v_0 - (v_0 + \Delta v)}{(v_0 + v_e) - (v_0 + \Delta v)} = m_p \frac{-\Delta v}{v_e - \Delta v}$$

On trouve alors $\boxed{\Delta m = 0,24.10^{19} kg}$
Il s'agit de presque un quart de la masse de l'astéroïde, ce qui ne paraît pas vraiment réalisable.