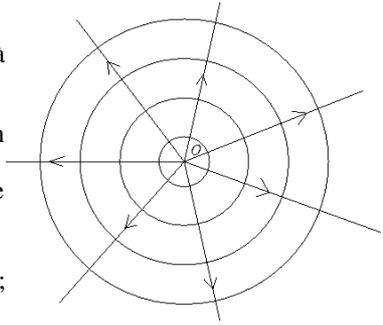


## Interactions dipolaires entre particules colloïdales.

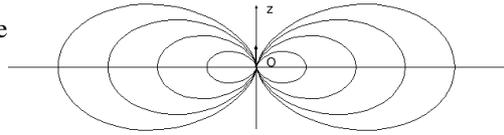
**Remarque :** l'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

**I.1**  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ , avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  (potentiel pris nul à l'infini);  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$ . La figure a été tracée dans un plan quelconque contenant O; les lignes du champ ont été orientées pour une charge  $q > 0$ .



**I.2** Après calcul dans l'approximation dipolaire :  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\delta}{r^2} \cos\theta$  ;

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q\delta \cos\theta}{r^3} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\delta \sin\theta}{r^3} \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Les lignes de champ ont l'allure}$$



représentée ci-contre dans tout plan contenant l'axe Oz.

**I.3**  $\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ . Un dipôle placé dans le champ électrique (non uniforme) d'un autre dipôle électrique subit une force attractive (car il est attiré vers les zones de champ intense) : ils ont donc tendance à s'agréger (en se plaçant « tête-bêche » l'un par rapport à l'autre de manière à minimiser l'énergie).

**I.4** Si l'on indice 1 et 2 les deux dipôles (1 pour celui placé en O), leur énergie électrostatique d'interaction vaut par exemple  $\mathcal{E} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{r})$ . D'où  $\mathcal{E} = -\frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\theta - 1)$ . On trouve les expressions de  $\vec{F}$  subie par le dipôle situé en  $\vec{r}$  par  $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} \mathcal{E}$ .

**I.5**  $[\vec{m}] = L^2 I$  ;  $[\frac{\vec{B}}{\mu_0}] = L^{-1} I$  (par exemple d'après la loi de Biot et Savart). D'où  $[\alpha_m] = L^3$ . La dépendance de  $\alpha_m$  en  $a^3$  en découle directement.

Alors  $\vec{m} = \frac{4\pi a^3}{\mu_0} B_0 \vec{e}_z$ . D'où une force, exercée par la particule 1 (située en O) sur la particule 2 (située en

$$\vec{r}), \text{ qui s'obtient à partir de (3) et (4) :}$$

$$F_r = \frac{12\pi B_0^2 a^6}{\mu_0 r^4} (1 - 3\cos^2\theta)$$

$$F_\theta = -\frac{24\pi B_0^2 a^6}{\mu_0 r^4} \cos\theta \sin\theta$$

**II.1** Les masses volumiques des particules et du fluide environnant étant égales, le poids et la poussée d'Archimède se compensent exactement et on ne les prend pas en compte. Le champ magnétique externe étant uniforme, il n'en résulte aucune force directe sur les particules. Il ne reste donc comme forces sur une particule que la force d'interaction  $\vec{F}$  étudiée à la question précédente et la traînée  $\vec{T}$  étudiée à la question suivante. L'équation du mouvement s'écrira alors (avec M la masse d'une particule) :  $M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{T}$ .

**II.2**  $[a] = L$ ,  $[\vec{v}] = LT^{-1}$ ,  $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$ ,  $[\vec{T}] = MLT^{-2}$ , d'où, avec le préfacteur qui vaut  $6\pi$  :  $\vec{T} = -6\pi\eta a \vec{v}$  (loi de Stokes, valable dans la limite où le nombre de Reynolds est inférieur à 1 environ).

**II.3** D'après les expressions établies au I.5, utilisées avec  $\theta = 0$ , la force exercée sur la particule du dessus (indignée 2) par la particule du dessous (indignée 1) vaut  $-\frac{24\pi B_0^2 a^6}{\mu_0 r^4} \vec{e}_z$ , où r est la distance entre les deux particules : elle est donc attractive. Si l'on note  $z_2(t)$  la position de la particule 2, l'équation de son mouvement s'écrit, en projection sur l'axe Oz, dans le cas où l'inertie est négligeable :

$$-\frac{24\pi B_0^2 a^6}{\mu_0 r^4} - 6\pi\eta a \frac{dz_2}{dt} = 0 \quad . \quad \text{Temps caractéristique lié à la friction visqueuse : } \tau_f = \frac{M}{6\pi\eta a} \quad .$$

L'approximation faite est valide si le temps caractéristique de variation de la force d'interaction (variation due au rapprochement entre les deux particules) est grand par rapport à  $\tau_f$ .

Dans le cadre de cette approximation,  $\frac{dz_2}{dt} = -\frac{4B_0^2 a^5}{\mu_0 \eta} \frac{1}{r^4}$  : la vitesse ne dépend que de la distance entre les deux particules.

**II.4** D'après ce qui précède, les deux particules ont à tout instant des vitesses opposées :  $\frac{dz_2}{dt} = -\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dr}{dt}$  . D'où  $\frac{dr}{dt} = -\frac{8B_0^2 a^5}{\mu_0 \eta} \frac{1}{r^4}$  , qui s'intègre en  $1 - \frac{r^5}{r_0^5} = \frac{t}{\tau_b}$  avec  $\tau_b = \frac{r_0^5 \mu_0 \eta}{40 B_0^2 a^5} \approx 3.10^{-2} \text{ s}$  .

**II.5**  $n = \frac{1}{r_0^3}$  ;  $\tau_b = \frac{\mu_0 \eta}{40 B_0^2 a^5} n^{-\frac{5}{3}}$  .

**II.6** Plus la suspension est diluée ( $n$  petit), plus  $\tau_b$  est grand : dans une suspension suffisamment diluée,  $\tau_b$  sera suffisamment grand pour que les interactions dipolaires soient négligées.

**II.7** Loi de Fick : voir cours. Le bilan de particules conduit à l'équation de la diffusion :  $\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$  . D'où

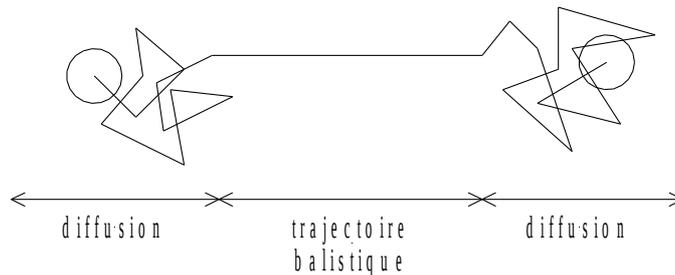
$$[D] = L^2 T^{-1} \quad . \quad D \approx 2.10^{-13} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} .$$

**II.8**  $\tau_d = \frac{r_0^2}{D}$  .

**II.9** Pour des solutions diluées de petites particules, les interactions dipolaires sont initialement négligeables et les déplacements des particules sont alors dominés par l'agitation thermique (mouvement brownien). Lorsque les particules se sont déplacées d'une distance de l'ordre de  $r_0$  (soit au bout d'un temps de l'ordre de

$\tau_d = \frac{1}{D} n^{-\frac{2}{3}}$  ), l'interaction dipolaire peut alors dominer l'agitation thermique et on a alors une phase

ballistique de durée de l'ordre de  $\tau_b = \frac{\mu_0 \eta}{40 B_0^2 a^5} n^{-\frac{5}{3}}$  .



**II.10** On obtient la concentration critique en écrivant  $\tau_d = \tau_b$  :  $n^* = \frac{\mu_0 k T}{240 \pi B_0^2 a^6} \approx 7.10^{10} \text{ m}^{-3}$ .

Et alors  $r^* \approx 200 \mu\text{m} \gg a$ .

**III.1** On a  $\vec{m} = \frac{4\pi a^3 B_0}{\mu_0} \vec{e}_z$  pour chacune des deux particules magnétiques. Si on note 1 la particule du bas et 2 celle du haut, on a d'après (3) et (4) :  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -2 \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi r^4} \vec{e}_z$  avec  $r = h + \delta$ . D'où

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{-24 \pi a^6 B_0^2}{\mu_0 (h + \delta)^4} \vec{e}_z .$$

**III.2**  $[Y] = ML^{-1}T^{-2}$  donc  $Y$  s'exprime en pascals. Plus  $Y$  est grand, plus le matériau "résiste" à la compression (son taux de compression est moindre pour une même force appliquée).

**III.3** On a bien sûr  $F_c = \|\vec{F}_{1 \rightarrow 2}\|$ . En utilisant (6) et le résultat du **III.1**, et en faisant l'approximation  $\delta \ll h$ , on arrive à :  $Y = \frac{24 B_0^2}{\mu_0} \frac{a^6}{R^2 h^4} \frac{\delta_0}{\delta_0 - \delta}$ . Or  $\frac{a^6}{r^2 h^4} \approx 1$ , d'où  $Y \approx \frac{24 B_0^2}{\mu_0} \frac{\delta_0}{\delta_0 - \delta}$ .

**III.4**  $Y \approx 10^4$  Pa, ce qui est une valeur "faible" (pour mémoire,  $Y \approx 10^{11}$  Pa pour l'acier...)

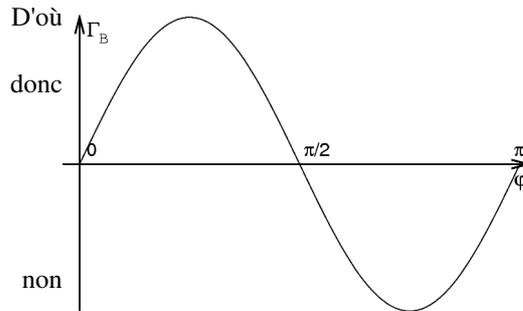
**III.5** Ce protocole est plus précis, probablement parce que l'on utilise de nombreux points expérimentaux (tout le pourtour de chaque sphère), plutôt qu'un seul point pour chaque sphère.

**IV.1** En faisant subir à la figure 3 une rotation d'axe  $Oy$  et d'angle  $-\theta - \varphi$ , on retombe sur la situation de la figure 1 ( $\vec{B}$  est selon  $\vec{e}_z$ ), où l'angle  $\theta$  (de la figure 1) est remplacé par  $-\varphi$ . Il suffit alors de prendre l'expression de  $\mathcal{E}$  au **I.4**, d'y remplacer  $\theta$  par  $-\varphi$ ,  $r$  par  $2a$ , et d'utiliser l'analogie qui relie le cas du dipôle électrique à celui du dipôle magnétique pour aboutir à  $\mathcal{E}_B = -\frac{\mu_0 m^2}{4 \pi (2a)^3} (3 \cos^2 \varphi - 1)$ . Or

$$m = \frac{4 \pi a^3}{\mu_0} B_0 .$$

$$\mathcal{E}_B = -\frac{\pi B_0^2 a^3}{2 \mu_0} (3 \cos^2 \varphi - 1) . \quad \text{Et donc}$$

$$\vec{\Gamma}_B = \frac{3 \pi B_0^2 a^3}{2 \mu_0} \sin(2\varphi) \vec{e}_y .$$



Remarques : on a  $\vec{\Gamma}_B = + \frac{d\mathcal{E}_B}{d\varphi} \vec{e}_y$  et non

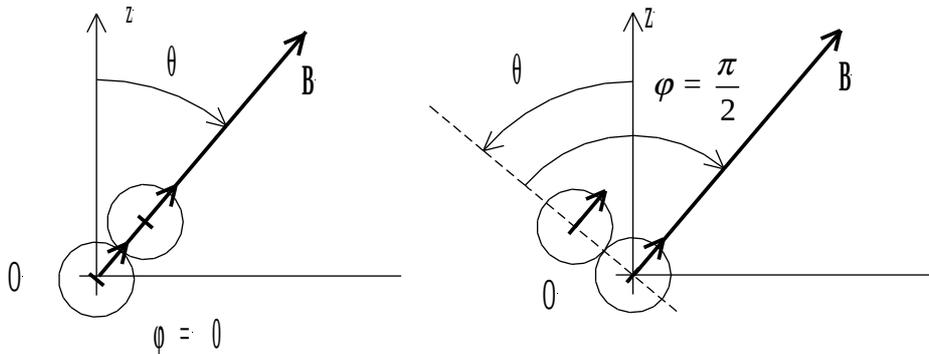
$$\vec{\Gamma}_B = - \frac{d\mathcal{E}_B}{d\varphi} \vec{e}_y \quad \text{car l'angle } \varphi \text{ est compté à partir}$$

de la direction du dipôle. Par ailleurs, un angle  $\varphi$  et l'angle  $\varphi + \pi$  correspondent exactement à la même situation physique (le dimère et le champ  $\vec{B}$  sont exactement dans les mêmes positions relatives), et donc on se limite pour  $\varphi$  à l'intervalle  $[0, \pi]$ .

Les positions d'équilibre sont obtenues pour  $\Gamma_B = 0$  : il y en a donc deux, pour  $\varphi = 0$  ou  $\pi/2$ .

$\varphi = 0$  correspond à un minimum de  $\mathcal{E}_B$  : l'équilibre est stable.

$\varphi = \pi/2$  correspond à un maximum de  $\mathcal{E}_B$  : l'équilibre est instable.



**IV.2** L'expression est homogène ; le signe - indique que le couple s'oppose bien à la rotation  $\dot{\theta} \vec{e}_z$ .

La force étant en  $\eta a \vec{v}$ ,  $\vec{v}$  étant en  $a \dot{\theta}$ , on voit qu'on obtient le couple en multipliant la force par une distance, de l'ordre de  $a$ .

**IV.3**  $\theta + \varphi = \omega t$ . Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe fixe  $Oy$  :

$$J \ddot{\theta} = -\eta a^3 \dot{\theta} + \frac{3\pi B_0^2 a^3}{2\mu_0} \sin[2(\omega t - \theta)] \quad \text{où } J \text{ est le moment d'inertie du dimère par rapport à l'axe } Oy.$$

**IV.4** En régime stationnaire :  $\ddot{\theta} = 0$  et donc  $\dot{\theta} = c^{te}$ . Donc, d'après l'équation du **IV.3**,  $\omega t - \theta = c^{te}$ . En dérivant cette dernière équation par rapport à  $t$ , on aboutit à  $\dot{\theta} = \omega$ . D'où  $\varphi = c^{te}$ . Et donc enfin

$$\sin[2\varphi] = \frac{2\eta\omega\mu_0}{3\pi B_0^2}. \quad \text{Si l'on est capable de mesurer l'angle } \varphi \text{ (en utilisant un microscope pour repérer}$$

l'axe du dimère), on en déduit la viscosité  $\eta$  du liquide par la formule précédente.

**IV.5** Un tel régime stationnaire ne peut exister que si  $\frac{2\eta\omega\mu_0}{3\pi B_0^2} \leq 1$ , d'où  $\omega^* = \frac{3\pi B_0^2}{2\eta\mu_0}$ .

Si  $\omega > \omega^*$  : l'équation différentielle à résoudre peut s'écrire  $T \ddot{\theta} + \dot{\theta} = \omega^* \sin(2(\omega t - \theta(t)))$  avec

$$T = \frac{J}{\eta a^3}. \quad \text{Il n'est pas demandé de la résoudre. Il est certain qu'un régime stationnaire ne peut pas exister et}$$

que le dimère "décoche" et ne peut suivre le champ magnétique, qui tourne trop vite pour lui. Il ne peut cependant rester immobile ( $\theta = cte$  ne peut être une solution de l'équation différentielle). Il est probable que le dimère effectue des oscillations de très faible amplitude autour d'une position moyenne, à la pulsation  $2\omega$ .